

19-1-2023, Λύσεις

ΘΕΜΑ 1ο

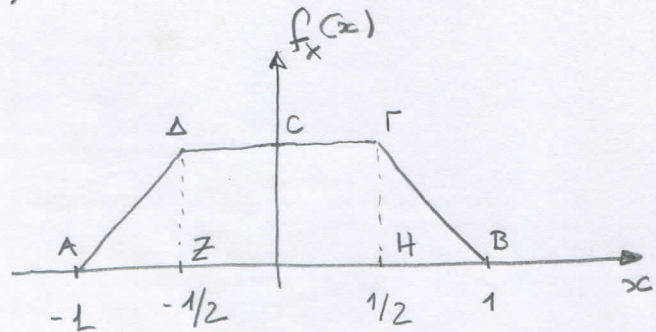
(α) Πρόσφα $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = 1$

ή $E_{AB\Gamma\Delta} = 1 \Rightarrow$

$$\frac{AB+\Gamma\Delta}{2} \cdot c = 1 \Rightarrow \frac{2+1}{2} c = 1$$

$$\Rightarrow c = \frac{2}{3} = 0.6667. \quad \text{Συνεπώς:}$$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{4}{3}(1+x) & -1 \leq x \leq -1/2 \\ 2/3 & |x| \leq 1/2 \\ \frac{4}{3}(1-x) & 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases}$$



(β) Για $x \leq -1$, $F_X(x) = 0$ ενώ για $x \geq 1$, $F_X(x) = 1$.

· Για $-1 \leq x \leq -1/2$, $F_X(x) = \int_{-\infty}^{-1} 0 dt + \int_{-1}^x \frac{4}{3}(1+t) dt$

$$= \frac{4}{3} \left(t + \frac{1}{2} t^2 \right) \Big|_{-1}^x = \frac{4}{3} \left(x + \frac{1}{2} x^2 \right) - \frac{4}{3} \left(-1 + \frac{1}{2} \right) = \frac{2}{3} (1+x)^2$$

· Για $-1/2 \leq x \leq 1/2$, $F_X(x) = \int_{-\infty}^{-1} 0 dt + \int_{-1}^{-1/2} \frac{4}{3}(1+t) dt + \int_{-1/2}^x \frac{2}{3} dt$

$$= E_{AZ\Delta} + \frac{2}{3} \left(x + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \left(x + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} x.$$

· Για $1/2 \leq x \leq 1$, $F_X(x) = \int_{-\infty}^{-1} 0 dt + \int_{-1}^{1/2} \frac{4}{3}(1+t) dt + \int_{1/2}^x \frac{2}{3} dt + \int_{1/2}^x \frac{4}{3}(1-t) dt$

$$= E_{AZ\Delta} + E_{ZH\Gamma\Delta} + \frac{4}{3} \left(t - \frac{1}{2} t^2 \right) \Big|_{1/2}^x$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + 1 \cdot \frac{2}{3} + \frac{4}{3} \left(x - \frac{1}{2} x^2 \right) - \frac{4}{3} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8} \right) = 1 - \frac{2}{3} (x-1)^2$$

$$\therefore F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq -1 \\ \frac{2}{3} (x+1)^2 & -1 \leq x \leq -1/2 \\ \frac{1}{2} + \frac{2}{3} x & -1/2 \leq x \leq 1/2 \\ 1 - \frac{2}{3} (x-1)^2 & 1/2 \leq x \leq 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

$$(8) \quad P(-0.3 \leq X \leq 0.8) = F_X(0.8) - F_X(-0.3)$$

(2)

$$= \left[1 - \frac{2}{3}(0.8-1)^2 \right] - \left[\frac{1}{2} + \frac{2}{3}(-0.3) \right] = \underline{\underline{0.6733}}$$

0

ΘΕΜΑ 2^ο

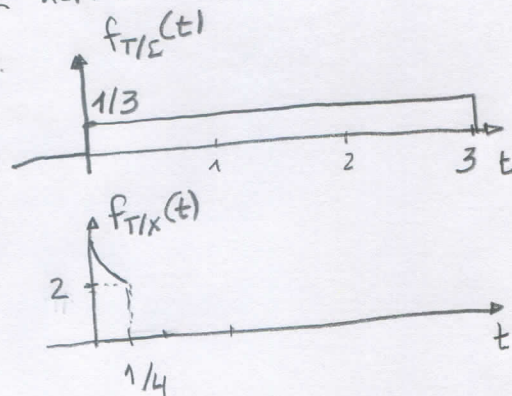
Ορίζουμε ως T τη διάρκεια του Eurogroup.

Επίσης: $\Sigma = \{0 \text{ Γίαντες ή ταν κοβαριό}\}$, $P(\Sigma) = \frac{1}{3}$
 $X = \{-1, -1, \dots, \text{χαλαρές}\}$, $P(X) = \frac{2}{3}$

Από την εκτίμηση μας δίδονται και οι δεδομένες κατανομές της τ.μ. T δεδομένων των γεγονότων Σ και X που αποτελούν και διαμέριση του δειγματοχώρου. Δηλαδή:

$$f_{T/\Sigma}(t) = \begin{cases} \frac{1}{3} & 0 \leq t \leq 3 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

$$f_{T/X}(t) = \begin{cases} 1/\sqrt{t} & 0 < t \leq \frac{1}{4} \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$



(α) Από το ΘΘΠ, έχουμε ότι:

$$f_T(t) = P(\Sigma) \cdot f_{T/\Sigma}(t) + P(X) \cdot f_{T/X}(t)$$

$$= \frac{1}{3} f_{T/\Sigma}(t) + \frac{2}{3} f_{T/X}(t) = \begin{cases} \frac{1}{9} + \frac{2}{3\sqrt{t}} & 0 < t \leq \frac{1}{4} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{4} < t \leq 3 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

$$\text{Συνεπώς: } P(T \leq \frac{1}{6}) = \int_0^{1/6} \left(\frac{1}{9} + \frac{2}{3\sqrt{t}} \right) dt = \frac{1}{9}t + \frac{2}{3}2\sqrt{t} \Big|_0^{1/6} = \underline{\underline{0.5628}}$$

(β) $P(X / T \leq \frac{1}{6}) = \frac{P(X) \cdot P(T \leq \frac{1}{6} / X)}{P(T \leq \frac{1}{6})}$ [Bayes]

$$= \frac{\frac{2}{3} \cdot \int_0^{1/6} \frac{1}{\sqrt{t}} dt}{0.5628} = \frac{1.1846 \cdot 2\sqrt{t} \Big|_0^{1/6}}{0.5628} = \underline{\underline{0.9672}}$$

(α)

$$\begin{aligned}
 P(A) &= P(|X-25| < 0.6) = P(25-0.6 < X < 25+0.6) \\
 &= P(24.4 < X < 25.6) = P\left(\frac{24.4-25}{\sqrt{0.3}} < \frac{X-25}{\sqrt{0.3}} < \frac{25.6-25}{\sqrt{0.3}}\right) \\
 &= \Phi(1.0954) - \Phi(-1.0954) = 2\Phi(1.0954) - 1 \\
 &= \underline{0.7286}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P(B) &= P(|Y-37| < 0.8) = P(37-0.8 < Y < 37+0.8) \\
 &= P(36.2 < Y < 37.8) = P\left(\frac{36.2-37}{\sqrt{0.36}} < \frac{Y-37}{\sqrt{0.36}} < \frac{37.8-37}{\sqrt{0.36}}\right) \\
 &= \Phi(1.3333) - \Phi(-1.3333) = 2\Phi(1.3333) - 1 = \underline{0.8164}
 \end{aligned}$$

Τα γεγονότα A, B είναι ανεξάρτητα διότι οι τ.φ. X, Y είναι ανεξάρτητες.

(β) Έστω R το κόστος κατασκευής. Από την εικόνη:

$$R = \begin{cases} 5.000 & , A \cap B \\ 6.200 & , A B^c \cup A^c B \\ 7.000 & , A^c \cap B^c \end{cases}$$

$$\text{Έχουμε ότι } P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0.7286 \times 0.8164 = 0.5948$$

$$\begin{aligned}
 P(A B^c \cup A^c B) &= P(A B^c) + P(A^c B) = P(A)P(B^c) + P(A^c)P(B) \\
 &= 0.7286(1-0.8164) + (1-0.7286)0.8164 = 0.3553
 \end{aligned}$$

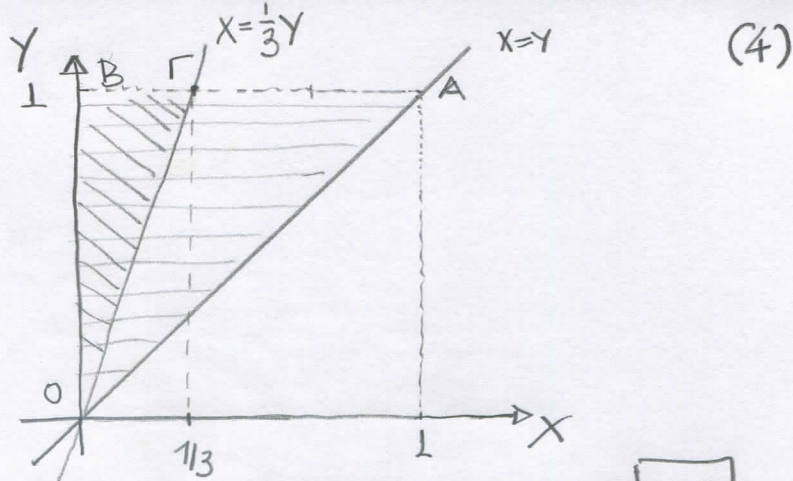
$$P(A^c \cap B^c) = P(A^c)P(B^c) = (1-0.7286)(1-0.8164) = 0.0498$$

∴ Το μέσο κόστος είναι:

$$\begin{aligned}
 E[R] &= 5.000 P(A \cap B) + 6.200 P(A B^c \cup A^c B) + 7.000 P(A^c \cap B^c) \\
 &= 5.000 \times 0.5948 + 6.200 \times 0.3553 + 7.000 \times 0.0498 \\
 &= \underline{5.525,46 \text{ €}}
 \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 4ο

- (α) Το πεδίο τιμών των (X, Y) ορίζεται από το $0 < x < y < 1$ να είναι το γραφικακταμένο τρίγωνο OAB στο σχήμα δίπλα.



Πρέπει $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y) dx dy = 1 \Rightarrow E_{OAB} \cdot c = 1 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot c = 1 \Rightarrow c = 2$

(β) $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y) dy = \int_x^1 2 dy = 2y \Big|_x^1 = 2(1-x)$ για $0 < x < 1$

$\therefore f_X(x) = \begin{cases} 2(1-x) & ; 0 < x < 1 \\ 0 & ; \text{αλλιώς} \end{cases}$

$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y) dx = \int_0^y 2 dx = 2x \Big|_0^y = 2y$, $0 < y < 1$

$\therefore f_Y(y) = \begin{cases} 2y & ; 0 < y < 1 \\ 0 & ; \text{αλλιώς} \end{cases}$

(γ) $P(3X > Y) = 1 - P(3X \leq Y) = 1 - E_{O\Gamma} \cdot c = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 2 = \frac{2}{3} //$

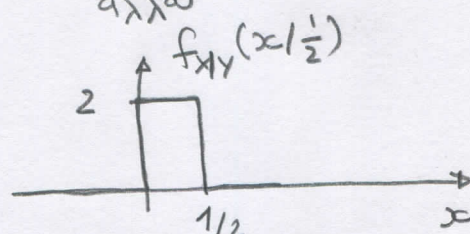
(δ) $P(X > \frac{1}{4} | Y = \frac{1}{2}) = \int_{\frac{1}{4}}^{+\infty} f_{X|Y}(x | y = \frac{1}{2}) dx$

Επομένως χρησιμοποιάμε τη δεσφευμένη β.π.π της τ.μ. X δεδομένης της Y , για $Y = \frac{1}{2}$.

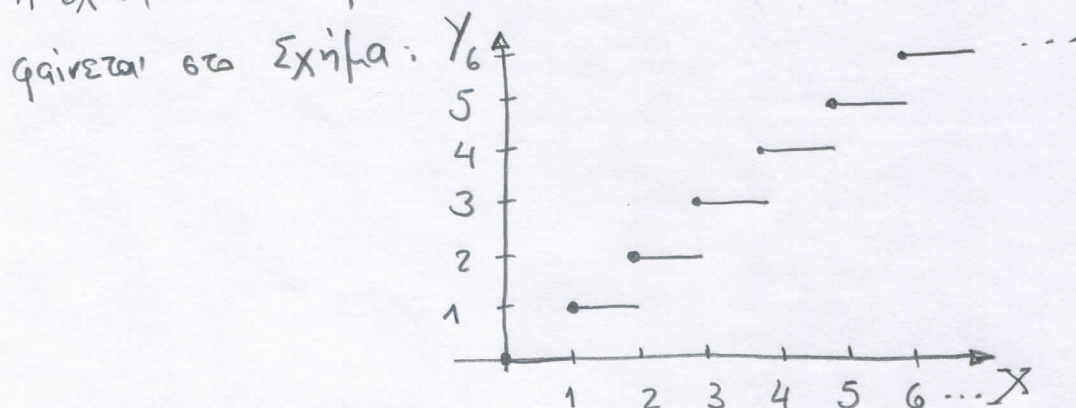
$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{2}{2y} = \frac{1}{y}$; $0 < x < y$
 $0 < y < 1$

Για $y = 1/2$, $f_{X,Y}(x | y = \frac{1}{2}) = \begin{cases} 2 & 0 < x < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$

$\therefore P(X > \frac{1}{4} | Y = \frac{1}{2}) = \int_{\frac{1}{4}}^{1/2} 2 dx = 2x \Big|_{1/4}^{1/2} = \frac{1}{2} //$



(α) Η σχέση εισόδου-εξόδου του μηχανισμού $Y=g(X)=\lfloor X \rfloor$



(β) Προφανώς, η τ.λ. Y παίρνει τιμές $0, 1, 2, 3, 4, \dots$ όπως τους φυσικούς από το 0 στο άπειρο: Διακριτή τ.λ.!!

Η συνάρτηση πιθανότητας της Y είναι:

$$P_Y(k) = P(Y=k) = P(k \leq X < k+1) = F_X(k+1) - F_X(k)$$

Αλλά, $X \sim \exp(\lambda)$ με σ.π.π. $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$; $x \geq 0$

και α.β.κ. $F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}$.

Συνεπώς
$$P_Y(k) = 1 - e^{-\lambda(k+1)} - (1 - e^{-\lambda k}) = e^{-\lambda k} - e^{-\lambda(k+1)} \Rightarrow$$

$$P_Y(k) = (1 - e^{-\lambda}) e^{-\lambda k}; \quad k=0, 1, 2, 3, \dots$$

Βλέπουμε ότι η τ.λ. Y έχει σ.π.π. της μορφής:

$$P_Y(k) = (1-p) p^k; \quad k=0, 1, 2, 3, \dots \quad \text{με } p = e^{-\lambda}$$

Συνεπώς, αναγνωρίζουμε ότι η Y ακολουθεί Γεωμετρική

κατανομή με παράμετρο $p = e^{-\lambda}$: $Y \sim \text{Geo}(e^{-\lambda})$

$$\therefore E[Y] = \frac{1}{p} = e^{\lambda}$$

$$\text{var}(Y) = \frac{1-p}{p^2} = \frac{1-e^{-\lambda}}{e^{-2\lambda}} \quad \square$$