

**Πανεπιστήμιο Κρήτης - Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών**  
**Θεωρία Πιθανοτήτων - Τελική Εξέταση**  
**Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης**  
**19 Ιανουαρίου 2023 - Διάρκεια: 3 Ώρες**

**Θέμα 1 - 20 μονάδες.** Μία συνεχής τυχαία μεταβλητή (τ.μ.)  $X$  έχει την ακόλουθη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.)

$$f_X(x) = \begin{cases} 2c(1+x) & -1 \leq x \leq -1/2, \\ c & -1/2 \leq x \leq 1/2, \\ 2c(1-x) & 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

- (α) Να δώσετε τη γραφική παράσταση της σ.π.π. και να υπολογίσετε την τιμή της σταθεράς  $c$ .  
(β) Υπολογίστε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής της  $X$  και δώστε την γραφική της παράσταση.  
(γ) Υπολογίστε την πιθανότητα  $P(-0.3 \leq X \leq 0.8)$ .

**Θέμα 2 - 20 μονάδες.** Πριν από κάθε συνεδρίαση του Eurogroup την άνοιξη του 2015, ο τότε υπουργός Οικονομικών Γιάννης Βαρουφάκης βρισκόταν σε μία από δύο πιθανές ψυχικές διαθέσεις. Με πιθανότητα  $1/3$  ήταν σοβαρός, οπότε συζητούσε κανονικά με την καγκελάρια Merkel για ένα τυχαίο χρονικό διάστημα  $Z$  μέχρι τρεις ώρες. Αντίθετα, με πιθανότητα  $2/3$  ήταν σε διάθεση χαβαλέ, οπότε τρόλαρε την καγκελάρια Merkel για το πολύ ένα τέταρτο και διαλυόταν νωρίς το Eurogroup. Έστω  $Y$  η διάρκεια σε ώρες του Eurogroup στη δεύτερη περίπτωση.

Υποθέτουμε ότι η τ.μ.  $Z$  ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα  $[0, 3]$  (ώρες),  $Z \sim U[0, 3]$ , ενώ η τ.μ.  $Y$  έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{y}} & 0 < y \leq \frac{1}{4}, \\ 0 & \text{αλλού,} \end{cases}$$

- (α) Υπολογίστε την πιθανότητα ένα τυχαίο Eurogroup να διήρκεσε το πολύ 10 λεπτά. Βοήθεια:  $(x^a)' = ax^{a-1}$ .  
(β) Ποια είναι η πιθανότητα ο Γιάννης να βρισκόταν σε διάθεση χαβαλέ δεδομένου ότι η διάρκεια του Eurogroup ήταν μικρότερη από 10 λεπτά;

**Θέμα 3 - 20 μονάδες.**

Τα χαρακτηριστικά  $X$  και  $Y$  μίας κατασκευής μοντελοποιούνται ως δύο ανεξάρτητες Γκαουσιανές τυχαίες μεταβλητές με κατανομές  $X \sim N(25, 0.3)$  και  $Y \sim N(37, 0.36)$ . Η κατασκευή θεωρείται παραδεκτή όταν ικανοποιούνται οι προδιαγραφές:

$$A: |X - 25| < 0.6 \text{ και } B: |Y - 37| < 0.8.$$

Το κόστος κατασκευής είναι 5000 ευρώ και προσαυξάνεται κατά 1200 ευρώ όταν ικανοποιείται ακριβώς μία από τις A, B, και κατά 2000 ευρώ όταν καμία από τις A, B δεν ικανοποιείται, προκειμένου να διορθωθεί και να γίνει παραδεκτή.

- (α) Να υπολογιστούν οι πιθανότητες των γεγονότων A και B.  
(β) Να υπολογιστεί το μέσο κόστος κατασκευής.

Δίδονται οι εξής τιμές της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής της τυπικής Γκαουσιανής,  $\Phi(u)$ , που μπορεί να είναι χρήσιμες:  $\Phi(1.0954) = 0.8643$ ,  $\Phi(1.3) = 0.9032$ ,  $\Phi(1.33) = 0.9082$ ,  $\Phi(1.65) = 0.9505$ .

**Θέμα 4 - 20 μονάδες.** Οι συνεχείς τ.μ.  $X$  και  $Y$  έχουν από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c & 0 < x < y < 1, \\ 0 & \text{αλλού.} \end{cases}$$

(α) Δώστε τη γραφική παράσταση της από κοινού σ.π.π. και υπολογίστε τη σταθερά  $c$ .

(β) Υπολογίστε την περιθωριακή σ.π.π.,  $f_X(x)$ , της τ.μ.  $X$  καθώς και την περιθωριακή σ.π.π.,  $f_Y(y)$ , της τ.μ.  $Y$ .

(γ) Υπολογίστε την πιθανότητα  $P(3X > Y)$ .

(δ) Υπολογίστε την δεσμευμένη πιθανότητα  $P(X > \frac{1}{4} | Y = \frac{1}{2})$ .

**Θέμα 5 - 20 μονάδες.** (Κβάντιση) Έστω  $X \sim \exp(\lambda)$  μία εκθετική τ.μ. με παράμετρο  $\lambda$ . Έστω  $Y = g(X) = \lfloor X \rfloor$  το ακέραιο μέρος της  $X$ . Δηλαδή, αν  $k \leq X < k+1$  τότε  $Y = k$  για  $k = 0, 1, 2, \dots$

(α) Δώστε τη γραφική παράσταση του κβαντιστή  $Y = g(X) = \lfloor X \rfloor$ .

(β) Υπολογίστε τη συνάρτηση πιθανότητας της  $Y$ . Αναγνωρίζετε την κατανομή της τ.μ.  $Y$ ; Ποια είναι η μέση τιμή,  $E[Y]$ , και η διασπορά,  $\text{var}(Y)$ , της  $Y$ ;