

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

HY-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2022
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Bonus Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 16/1/2023

Ημερομηνία Παράδοσης: 6/2/2023

Οδηγίες: Στα πλαίσια αυτής της **προγραμματιστικής** άσκησης θα πρέπει να παραδώσετε ένα συμπιεσμένο αρχείο (.rar, .zip κτλ.) το οποίο θα περιλαμβάνει όλα τα αρχεία πηγαίου κώδικα (.m, .py) που έχετε υλοποιήσει, καθώς και το PDF της αναφοράς σας. Συμπεριλάβετε στο όνομα του αρχείου και στην αναφορά σας το ονοματεπώνυμό σας, τον ΑΜ σας και το τμήμα σας. **Δε χρειάζεται να λύσετε τίποτα στο χαρτί, εκτός αν σας ζητείται.** Σε περίπτωση αντιγραφής (μικρής ή μεγάλης εμβέλειας) ολόκληρη η bonus άσκηση θα μηδενίζεται, για όλους τους εμπλεκόμενους. Η υλοποίησή σας μπορεί να γίνει είτε με τη χρήση MATLAB (συνιστώμενη) είτε με τη χρήση Python (βιβλιοθήκες numpy, scipy). Η παράδοση της άσκησης θα γίνει ηλεκτρονικά, **ΑΠΟΚΛΕΙΣΤΙΚΑ** μέσω της σελίδας e-learn του μαθήματος.

Άσκηση 1.

Η Αρσινόη και ο Περικλής παίζουν κορώνα γράμματα με ένα δίκαιο νόμισμα. Έπειτα από κάθε ρίψη, ο χαμένος δίνει στο νικητή ένα ευρώ. Θεωρώντας ότι ο Περικλής ποντάρει συνεχώς στην επιλογή της κορώνας, προσομοιώστε αυτό το παιχνίδι χρησιμοποιώντας τις κατάλληλες συναρτήσεις του προγραμματιστικού περιβάλλοντος της επιλογής σας (MATLAB: rand, randi - Python: numpy.random.rand, numpy.random.randint). Πιο συγκεκριμένα:

- (α) Έστω n το πλήθος των ρίψεων. Για όλα τα διαφορετικά n στο διάστημα $[1, 5000]$ υπολογίστε το κέρδος (ή τη ζημία) για κάθε παίκτη και σχεδιάστε το αντίστοιχο γράφημα του κέρδους (ή της ζημίας) συναρτήσει του αριθμού των ρίψεων. Σχολιάστε στην αναφορά σας τι παρατηρείτε.
- (β) Έστω ότι ο Περικλής ανταλλάσει στα κρυφά το αρχικό νόμισμα με ένα πειραγμένο που φέρνει κορώνα με πιθανότητα 0.75. Επαναλάβετε τα ζητούμενα του ερωτήματος (α).

Άσκηση 2.

Ο τύπος της κανονικής κατανομής είναι:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

- (α) Χρησιμοποιώντας τον παραπάνω τύπο, **χωρίς** δηλαδή τη χρήση των έτοιμων συναρτήσεων των MATLAB/Python για την κανονική κατανομή, σχεδιάστε μία Γκαουσιανή κατανομή με μέση τιμή $\mu = 4$ και διασπορά $\sigma^2 = 1.4$, στο διάστημα $[-4, 12]$.

- (β) Χρησιμοποιώντας αυτή τη φορά την έτοιμη συνάρτηση της κανονικής κατανομής (MATLAB: `normpdf` - Python: `scipy.stats.norm`), σχεδιάστε μία Γκαουσιανή με $\mu = 0$ και $\sigma^2 = 1$, σε διάστημα της επιλογής σας. Διατηρώντας σταθερή τη μέση τιμή και αλλάζοντας τη διασπορά σχεδιάστε σε ένα κοινό γράφημα την παραπάνω Γκαουσιανή, καθώς και τέσσερις ακόμα Γκαουσιανές με διαφορετικό σ^2 . Επαναλάβετε την ίδια διαδικασία διατηρώντας αυτή τη φορά σταθερή τη διασπορά και αλλάζοντας τη μέση τιμή. Σχολιάστε στην αναφορά σας τι συμπεραίνετε για τη 'φυσική' σημασία της μέσης τιμής και της διασποράς, βάσει των γραφημάτων που παράξατε.

Άσκηση 3.

- (α) Για $\lambda = 1$ και για τέσσερις ακόμη τιμές της επιλογής σας, σχεδιάστε μία Poisson κατανομή και σχολιάστε στην αναφορά σας σχετικά με την 'επιρροή' της τιμής του λ στη συγκεκριμένη κατανομή.
- (β) Για $n = 10$ και $p = 0.3$ σχεδιάστε στο ίδιο διάγραμμα τις αντίστοιχες Poisson και Διωνυμική. Επαναλάβετε για $n = 100$ και $p = 0.1$, για $n = 1000$ και $p = 0.1$ και για $n = 10000$ και $p = 0.01$. Για όλες τις διαφορετικές περιπτώσεις, σχολιάστε τα αποτελέσματα στην αναφορά σας.

Χρήσιμες συναρτήσεις: (MATLAB: `binopdf`, `poisspdf` - Python: `scipy.stats.binom`, `scipy.stats.poisson`)

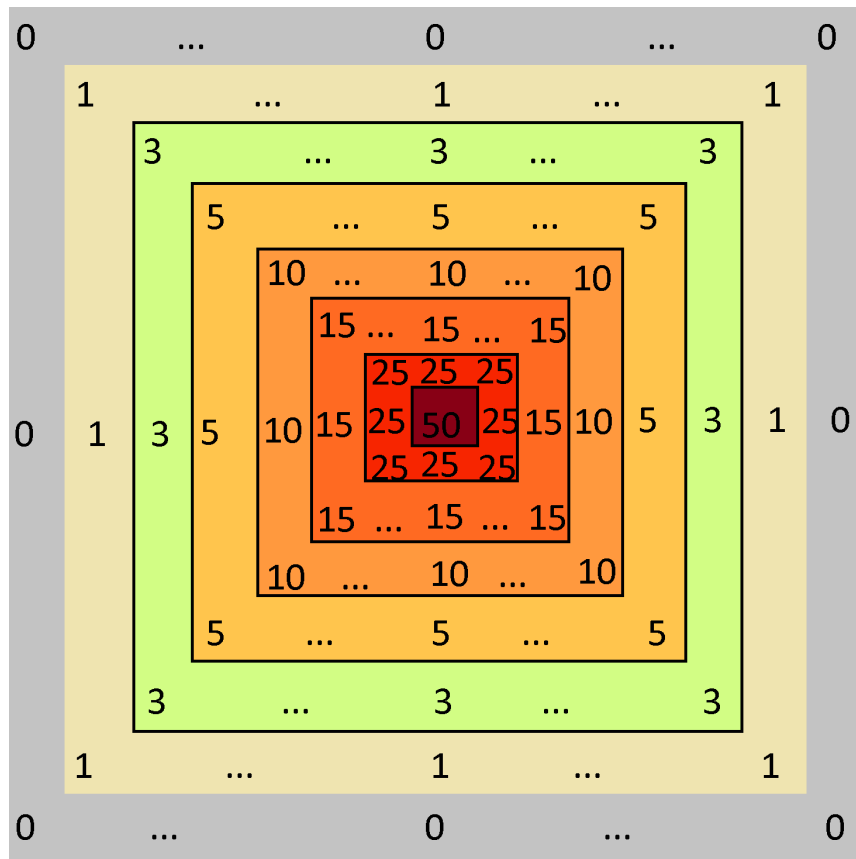
Άσκηση 4.

Στον τοίχο του σπιτιού σας έχετε κρεμασμένο έναν τετράγωνο στόχο μεγέθους 15×15 , όπως αυτόν του παρακάτω σχήματος, και κρατάτε στο χέρι σας 6 βελάκια. Οι τιμές που αναγράφονται στο σχήμα αντιστοιχούν στους πόντους που θα κερδίσετε εάν πετάξετε και καρφώσετε ένα βελάκι εντός των αντίστοιχων ορίων. Κάθε γύρος του παιχνιδιού τελειώνει όταν έχετε πετάξει και τα 6 βελάκια. Στο τέλος κάθε γύρου μετράτε το σκορ που έχετε πετύχει, μαζεύετε τα βελάκια και το σκόρ ξεκινάει ξανά από το 0. Η πιθανότητα να πετύχετε με κάποιο βελάκι ένα συγκεκριμένο κελί με συντεταγμένες (x, y) , όπου $1 \leq x \leq 15$ και $1 \leq y \leq 15$, είναι ίδια για όλα τα κελιά. Επίσης, η πιθανότητα να μην πετύχετε κάποιο από τα κελιά του στόχου είναι ίση με το 0.

Προσομοιώστε στο προγραμματιστικό περιβάλλον της επιλογής σας 10000 γύρους του παραπάνω παιχνιδιού και απαντήστε στα παρακάτω ερωτήματα, αποκλειστικά και μόνο από τα αποτελέσματα που θα προκύψουν (αξιοποιήστε κατάλληλα τη μέθοδο της σχετικής συχνότητας/εκ των υστέρων ορισμό πιθανότητας):

- (α) Προσεγγίστε πειραματικά την πιθανότητα ένα βελάκι να πέσει μέσα στο τετράγωνο των 50 πόντων. Σχολιάστε στην αναφορά σας αν αυτή η προσεγγιστική πιθανότητα παίρνει την τιμή που θα περιμένατε.
- (β) Προσεγγίστε πειραματικά την πιθανότητα ένα βελάκι να πέσει σε κάποιο κελί των 5 πόντων. Σχολιάστε στην αναφορά σας αν αυτή η προσεγγιστική πιθανότητα παίρνει την τιμή που θα περιμένατε.
- (γ) Προσεγγίστε πειραματικά την πιθανότητα σε ένα γύρο να κερδίσετε περισσότερους από 200 πόντους.

- (δ) Προσεγγίστε πειραματικά την πιθανότητα σε ένα γύρο να κερδίσετε λιγότερους από 50 πόντους.
- (ε) Προσεγγίστε πειραματικά την πιθανότητα σε ένα γύρο να κερδίσετε ακριβώς 100 πόντους.
- (στ) Σχεδιάστε δύο ιστογράμματα, ένα για τις διαφορετικές τιμές πόντων που πετυχαίνετε στο σύνολο των 10000 γύρων και ένα για τα διαφορετικά σκορ που επιτυγχάνετε σε κάθε γύρο. Σχολιάστε στην αναφορά σας τα δύο ιστογράμματα. (Χρήσιμες συναρτήσεις: MATLAB: histogram - Python: numpy.histogram)



Άσκηση 5.

Ένα χρονικό δείγμα της εξόδου ενός μικροφώνου μοντελοποιείται ως μια Γκαουσιανή τ.μ. με μηδενική μέση τιμή και τυπική απόκλιση 5 Volts. Η έξοδος του μικροφώνου δίνεται σαν είσοδος σε έναν ενισχυτή ήχου. Για να αποφευχθεί η υπερφόρτωση της εισόδου του ενισχυτή, χρησιμοποιείται κόφτης της μορφής:

$$Y = c(X) = \begin{cases} X, & |X| \leq 10 \\ -10, & X < -10 \\ 10, & X > 10 \end{cases}$$

- (α) Παράξτε $N = 10^3$ δείγματα των τ.μ. X και Y . Σχεδιάστε ένα ιστόγραμμα για την εκτίμηση της σ.π.π. της Y και συγκρίνετε στην αναφορά σας με τη θεωρητική σ.π.π. που δίνεται στην εκφώνηση. Επαναλάβετε ξανά για $N = 10^5$.
- (β) Θεωρήστε ότι θέλετε να παράξετε μία εκθετική τ.μ. Y , έχοντας πρόσβαση μόνο σε έναν ομοιόμορφο $[0,1]$ γεννήτορα τυχαίων αριθμών. Έστω X ομοιόμορφη $[0,1]$ τ.μ. Δείξτε με αναλυτικό τρόπο (στο χαρτί) ότι η $Y := -\frac{1}{\alpha} \ln(X)$ είναι εκθετική τυχαία μεταβλητή με μέση τιμή $\frac{1}{\alpha}$.
- (γ) Παράξτε $N = 10^3$ δείγματα της τ.μ. Y για $\alpha = 0.5$. Σχεδιάστε ένα ιστόγραμμα για την εκτίμηση της σ.π.π. της Y και συγκρίνετε στην αναφορά σας με τη θεωρητική σ.π.π. της εκθετικής κατανομής. Επαναλάβετε ξανά για $N = 10^5$.

(Χρήσιμες συναρτήσεις: MATLAB: histogram, rand - Python: numpy.histogram, numpy.random.randint)

Για την εκτίμηση σ.π.π. μέσω ιστογράμματος ίσως σας βοηθήσει ο παρακάτω κώδικας σε MATLAB:

```
miny = min(y);
maxy = max(y);
NumBins = 51;
h = hist(y, NumBins);
for k = 1:NumBins
    bincenters(k) = miny + ((maxy-miny)/NumBins) * (k-1/2);
end
h = h / sum(h); % normalize PDF estimate
plot(bincenters,h);
legend('Histogram PDF estimate');
```