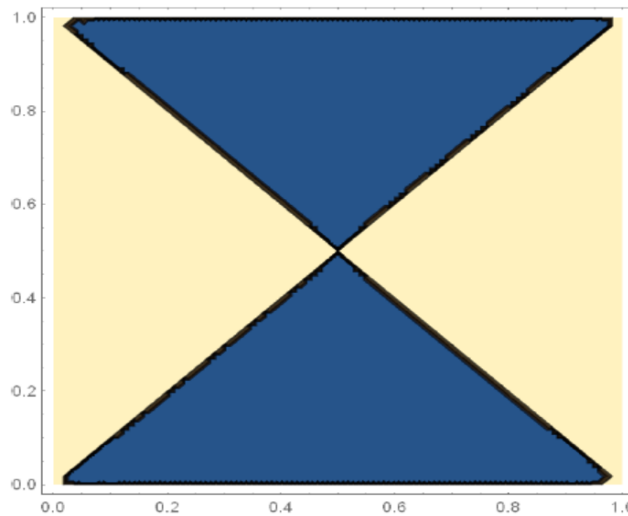


Άσκηση 1 Οι συνεχείς Τ.Μ. X και Y έχουν από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας που δίνεται από τον εξής τύπο:

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} c, & \max(x, 1-x) < y < 1, \quad 0 < x < 1 \\ c, & 0 < y < \min(x, 1-x), \quad 0 < x < 1 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

- (i) Να σχεδιάσετε το επίπεδο (x, y) και να προσδιορίσετε την περιοχή στην οποία ισχύει $f_{XY}(x, y) \neq 0$.
- (ii) Να υπολογίσετε την τιμή της σταθεράς c .
- (iii) Να υπολογίσετε την οριακή συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_Y(y)$ και τη μέση τιμή της τ.μ. Y .

Λύση:



Σχήμα 1: Η ζητούμενη γραφική παράσταση στο ερώτημα 1 (i).

- (i) Η περιοχή στην οποία η $f_{XY}(x, y)$ παίρνει τιμή διάφορη του 0 είναι τα γραμμοσκιασμένα τρίγωνα στο σχήμα 1.
- (ii) Πρέπει να ισχύει

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dx dy = 1 \Rightarrow c \cdot E_1 + c \cdot E_2 = 1 \Rightarrow c \cdot \frac{1}{4} + c \cdot \frac{1}{4} = 1 \Rightarrow c = 2.$$

Εναλλακτικά:

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dx dy &= 1 \Rightarrow \\
 \int_0^{\frac{1}{2}} \int_y^{1-y} c \cdot dx dy + \int_{\frac{1}{2}}^1 \int_{1-y}^y c \cdot dx dy &= 1 \Rightarrow \\
 c \int_0^{\frac{1}{2}} (1-2y) dy + c \int_{\frac{1}{2}}^1 (2y-1) dy &= 1 \Rightarrow \\
 c\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + c\left(0 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right) &= 1 \Rightarrow \\
 \frac{c}{2} &= 1 \Rightarrow \\
 c &= 2.
 \end{aligned}$$

(iii) Για $y \leq \frac{1}{2}$ έχουμε

$$f_Y(y) = \int_0^1 f_{XY}(x, y) dx = \int_y^{1-y} 2 dx = 2(1-2y).$$

Για $\frac{1}{2} < y < 1$ έχουμε

$$f_Y(y) = \int_0^1 f_{XY}(x, y) dx = \int_{1-y}^y 2 dx = 2(2y-1).$$

Οπότε

$$f_X(x) = \begin{cases} 2(1-2y), & 0 < y \leq \frac{1}{2} \\ 2(2y-1), & \frac{1}{2} < y < 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 E[Y] &= \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y) dy \\
 &= \int_0^{\frac{1}{2}} y 2(1-2y) dy + \int_{\frac{1}{2}}^1 y 2(2y-1) dy \\
 &= \frac{1}{4} - \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{8} + \frac{4}{3} - 1 - \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{4} \\
 &= \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

Άσκηση 2 Αν οι τυχαίες μεταβλητές X, Y έχουν κοινή συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} 8xy, & 0 \leq x \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Να βρεθούν:

- (i) $f_X(x)$
- (ii) $f_Y(y)$
- (iii) $E[X]$
- (iv) $\text{var}(X)$
- (v) $E[Y]$
- (vi) $\text{var}(Y)$
- (vii) $\rho(X, Y)$

Λύση:

(i)

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dy = \int_x^1 8xy dy = 4x(1 - x^2), \quad 0 \leq x \leq 1$$

(ii)

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dx = \int_0^y 8xy dx = 4y^3, \quad 0 \leq y \leq 1$$

(iii)

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = \int_0^1 x(4x - 4x^3) dx = \left[4\frac{x^3}{3} - 4\frac{x^5}{5} \right]_0^1 = \frac{8}{15}$$

(iv)

$$E[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x) dx = \int_0^1 x^2(4x - 4x^3) dx = \left[4\frac{x^4}{4} - 4\frac{x^6}{6} \right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$\text{var}(X) = E[X^2] - E[X]^2 = \frac{1}{3} - \left(\frac{8}{15} \right)^2 = \frac{11}{225}$$

(v)

$$E[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y) dy = \int_0^1 y 4y^3 dy = \left[4\frac{y^5}{5} \right]_0^1 = \frac{4}{5}$$

(vi)

$$E[Y^2] = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 f_Y(y) dy = \int_0^1 y^2 4y^3 dy = \left[4\frac{y^6}{6} \right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

$$\text{var}(Y) = E[Y^2] - E[Y]^2 = \frac{2}{3} - \left(\frac{4}{5} \right)^2 = \frac{2}{75}$$

(vii)

$$E[XY] = \int_0^1 \int_0^y xy 8xy dx dy = 8 \int_0^1 y^2 \int_0^y x^2 dx dy = 8 \int_0^1 y^2 \cdot \frac{y^3}{3} dy = \frac{8}{3} \frac{y^6}{6} = \frac{4}{9}$$

$$\text{cov}(X, Y) = E[XY] - E[X]E[Y] = \frac{4}{9} - \frac{8 \cdot 4}{15 \cdot 5} = \frac{12}{675}$$

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{\frac{12}{675}}{\sqrt{\frac{11}{225} \cdot \frac{2}{75}}} = \frac{4}{\sqrt{66}} = 0.4924$$

Άσκηση 3 Η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας δύο τυχαίων μεταβλητών X και Y δίνεται από τη σχέση

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} 2e^{-x-y}, & 0 < x < y < \infty \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

- (i) Να υπολογίσετε τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της X , $f_X(x)$, καθώς επίσης και την αναμενόμενη τιμή της X , $E[X]$.
- (ii) Να προσδιορίσετε εάν οι τυχαίες μεταβλητές X και Y είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους.
- (iii) Να υπολογίσετε την πιθανότητα του γεγονότος $Y > 3X$.

Λύση:

- (i) Από τον ορισμό της pdf, πρέπει $f_{XY}(x, y) \neq 0$ για $(x, y) \in S$

$$\text{Άρα } f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dy = \begin{cases} \int_x^{\infty} 2e^{-x-y} dy, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

$$\text{Και } \int_x^{\infty} 2e^{-x-y} dy = 2e^{-x} \int_x^{\infty} e^{-y} dy = 2e^{-2x}.$$

$$\text{Άρα } f_X(x) = \begin{cases} 2e^{-2x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

Το παραπάνω είναι εκθετική κατανομή με παράμετρο $\lambda = 2$, άρα $E[X] = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2}$.
Στο ίδιο αποτέλεσμα θα καταλήγαμε και από τον ορισμό $E[X] = \int_0^{\infty} x \cdot 2e^{-2x} dx$.

- (ii) Για να είναι ανεξάρτητες πρέπει $f_{XY}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$.

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dx = \begin{cases} \int_0^y 2e^{-x-y} dx, & y > 0 \\ 0, & y \leq 0 \end{cases}$$

$$\int_0^y 2e^{-x-y} dx = 2e^{-y} \cdot (1 - e^{-y})$$

Άρα

$$f_Y(y) = \begin{cases} 2e^{-y}(1 - e^{-y}), & y > 0 \\ 0, & y \leq 0 \end{cases}$$

Συνεπώς $f_X(x) \cdot f_Y(y) = 2e^{-2x} \cdot 2e^{-y}(1 - e^{-y}) \neq 2e^{-x-y}$, για $0 < x < y < \infty$ και άρα οι X, Y δεν είναι ανεξάρτητες.

(iii)

$$P(Y > 3X) = \int_{x=0}^{\infty} \int_{y=3x}^{\infty} 2e^{-x-y} dy dx = \int_{x=0}^{\infty} 2e^{-x} \left[\frac{e^{-y}}{-1} \right]_{y=3x}^{\infty} dx = \int_{x=0}^{\infty} 2e^{-4x} dx = \frac{1}{2}$$

Άσκηση 4. Θεωρήστε 4 Τ.Μ. W, X, Y, Z , για τις οποίες ισχύουν:

$$E[W] = E[X] = E[Y] = E[Z] = 0 \\ VAR[W] = VAR[X] = VAR[Y] = VAR[Z] = 1.$$

Επιπλέον, υποθέστε ότι οι W, X, Y, Z είναι ασυσχέτιστες ανά ζεύγη. Να υπολογιστούν οι συντελεστές συσχέτισης $\rho(A, B)$ και $\rho(A, C)$, όπου:

$$A = W + X, B = X + Y, C = Y + Z.$$

Λύση: Εφόσον οι W, X, Y, Z είναι ασυσχέτιστες ανά ζεύγη, έχουμε:

$$\begin{aligned} COV(W, X) &= 0 \Rightarrow E[WX] - E[W]E[X] = 0 \Rightarrow E[WX] = E[W]E[X]. \\ COV(W, Y) &= 0 \Rightarrow E[WY] - E[W]E[Y] = 0 \Rightarrow E[WY] = E[W]E[Y]. \\ COV(W, Z) &= 0 \Rightarrow E[WZ] - E[W]E[Z] = 0 \Rightarrow E[WZ] = E[W]E[Z]. \\ COV(X, Y) &= 0 \Rightarrow E[XY] - E[X]E[Y] = 0 \Rightarrow E[XY] = E[X]E[Y]. \\ COV(X, Z) &= 0 \Rightarrow E[XZ] - E[X]E[Z] = 0 \Rightarrow E[XZ] = E[X]E[Z]. \\ COV(Y, Z) &= 0 \Rightarrow E[YZ] - E[Y]E[Z] = 0 \Rightarrow E[YZ] = E[Y]E[Z]. \end{aligned}$$

Με βάση τον ορισμό του συντελεστή συσχέτισης των A και B , έχουμε:

$$\rho(A, B) = \frac{COV(A, B)}{\sqrt{VAR[A]VAR[B]}}$$

Για τον υπολογισμό της συνδιασποράς των A και B , έχουμε:

$$\begin{aligned} COV(A, B) &= E[AB] - E[A]E[B] = E[(W + X)(X + Y)] - E[W + X]E[X + Y] \\ &= E[WX + WY + X^2 + XY] - (E[W] + E[X])(E[X] + E[Y]) = \\ &= E[WX] + E[WY] + E[X^2] + E[XY] - (0 + 0)(0 + 0) \\ &= E[W]E[X] + E[W]E[Y] + E[X^2] + E[X]E[Y] \\ &= 0 \times 0 + 0 \times 0 + E[X^2] + 0 \times 0 \\ &= E[X^2] = VAR[X] + (E[X])^2 = 1 + 0^2 = 1. \end{aligned}$$

Για τον υπολογισμό της διασποράς των A και B , έχουμε:

$$\begin{aligned} VAR[A] &= VAR[W + X] = VAR[W] - 2COV(W, X) + VAR[X] = 1 - 2 \times 0 + 1 = 2. \\ VAR[B] &= VAR[X + Y] = VAR[X] - 2COV(X, Y) + VAR[Y] = 1 - 2 \times 0 + 1 = 2. \end{aligned}$$

Ως εκ τούτου, ο συντελεστής συσχέτισης των A και B θα είναι τελικά:

$$\rho(A, B) = \frac{COV(A, B)}{\sqrt{VAR[A]VAR[B]}} = \frac{1}{\sqrt{2 \times 2}} = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}.$$

Ακολουθώντας το ίδιο σκεπτικό, με βάση τον ορισμό του συντελεστή συσχέτισης των A και C , έχουμε:

$$\rho(A, C) = \frac{COV(A, C)}{\sqrt{VAR[A]VAR[C]}}.$$

Για τον υπολογισμό της συνδιασποράς των A και C , έχουμε:

$$\begin{aligned} COV(A, C) &= E[AC] - E[A]E[C] = E[(W + X)(Y + Z)] - E[W + X]E[Y + Z] \\ &= E[WY + WZ + XY + XZ] - (E[W] + E[X])(E[Y] + E[Z]) = \\ &= E[WY] + E[WZ] + E[XY] + E[XZ] - (0 + 0)(0 + 0) \\ &= E[W]E[Y] + E[W]E[Z] + E[X]E[Y] + E[X]E[Z] \\ &= 0 \times 0 + 0 \times 0 + 0 \times 0 + 0 \times 0 = 0. \end{aligned}$$

Για τον υπολογισμό της διασποράς των A και C , έχουμε:

$$\begin{aligned} \text{VAR}[A] &= \text{VAR}[W + X] = \text{VAR}[W] - 2\text{COV}(W, X) + \text{VAR}[X] = 1 - 2 \times 0 + 1 = 2. \\ \text{VAR}[C] &= \text{VAR}[Y + Z] = \text{VAR}[Y] - 2\text{COV}(Y, Z) + \text{VAR}[Z] = 1 - 2 \times 0 + 1 = 2. \end{aligned}$$

Ως εκ τούτου, ο συντελεστής συσχέτισης των A και C θα είναι τελικά:

$$\rho(A, C) = \frac{\text{COV}(A, C)}{\sqrt{\text{VAR}[A]\text{VAR}[C]}} = \frac{0}{\sqrt{2 \times 2}} = \frac{0}{\sqrt{4}} = \frac{0}{2} = 0.$$

Άσκηση 5. Οι τυχαίες μεταβλητές X, Y είναι ανεξάρτητες, ισόνομες με

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Να βρεθεί η πιθανότητα οι ρίζες της εξίσωσης $z^2 - 2Xz + Y = 0$ να είναι πραγματικές. Λύση: Η κοινή συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας είναι:

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} \lambda^2 e^{-\lambda(x+y)}, & x, y \geq 0 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Οι ρίζες είναι πραγματικές όταν $\Delta = 4X^2 - 4Y \geq 0 \Rightarrow X^2 \geq Y$.

$$\begin{aligned} P(\Delta \geq 0) &= P(X^2 \geq Y) = \int_0^\infty \int_0^{x^2} \lambda^2 e^{-\lambda(x+y)} dy dx \\ &= \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x} (1 - e^{-\lambda x^2}) dx \\ &= 1 - \lambda e^{\frac{\lambda}{4}} \int_0^\infty e^{-\lambda(x+\frac{1}{2})^2} dx \end{aligned}$$

Θέτουμε $t = \sqrt{2}\sqrt{\lambda}(x + \frac{1}{2}) \Rightarrow dt = \sqrt{2\lambda}dx$. Για $x = 0 \Rightarrow t = \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{2}}$. Άρα

$$\begin{aligned} P(\Delta \geq 0) &= 1 - \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{2}} e^{\frac{\lambda}{4}} \int_{\frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{2}}}^\infty e^{-\frac{t^2}{2}} dt \\ &= 1 - \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{2}} e^{\frac{\lambda}{4}} \left(\int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{t^2}{2}} dt - \int_{-\infty}^{\sqrt{\frac{\lambda}{2}}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right) \\ &= 1 - \sqrt{\pi}\sqrt{\lambda} e^{\frac{\lambda}{4}} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{t^2}{2}} dt - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\sqrt{\frac{\lambda}{2}}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right) \\ &= 1 - \sqrt{\pi}\sqrt{\lambda} e^{\frac{\lambda}{4}} \left(1 - \Phi\left(\sqrt{\frac{\lambda}{2}}\right) \right) \end{aligned}$$

όπου

$$\begin{aligned} \Phi(\alpha) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\alpha e^{-\frac{t^2}{2}} dt \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{t^2}{2}} dt &= 1 \end{aligned}$$

Άσκηση 6. Δύο φοιτητές A και B ξεκινούν ταυτόχρονα και ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλο να εργάζονται στο project ενός μαθήματος. Ο χρόνος που θα χρειαστεί για να ολοκληρώσει το project ο A είναι συνεχής T.M. που ακολουθεί εκθετική κατανομή με μέση τιμή 4 ώρες. Για τον B, ο χρόνος ακολουθεί επίσης εκθετική κατανομή με μέση τιμή 6 ώρες. Δίδονται η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, η αναμενόμενη τιμή και η διασπορά της εκθετικής κατανομής:

$$f_T(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0, \quad E[T] = \frac{1}{\lambda}, \quad \text{var}(T) = \frac{1}{\lambda^2}$$

- (i) Ποια η πιθανότητα ο A να ολοκληρώσει το project πριν από τον B.
- (ii) Ποια είναι η πιθανότητα ένας από τους δύο να ολοκληρώσει το project μία τουλάχιστον ώρα πριν από τον άλλο.
- (iii) Χρησιμοποιώντας κάποια γλώσσα προγραμματισμού (προτείνεται MATLAB), για μεγάλο αριθμό επαναλήψεων του τυχαίου πειράματος, να υπολογίσετε αριθμητικά την πιθανότητα των παραπάνω ερωτημάτων.

Λύση:

- (i) Έστω X ο χρόνος που χρειάζεται ο A για να ολοκληρώσει την εργασία, και Y ο χρόνος που χρειάζεται ο B.

$$E[X] = \frac{1}{\lambda_A} = 4 \Rightarrow \lambda_A = \frac{1}{4}$$

$$E[Y] = \frac{1}{\lambda_B} = 6 \Rightarrow \lambda_B = \frac{1}{6}$$

Επειδή οι φοιτητές εργάζονται ανεξάρτητα, η κοινή συνάρτηση κατανομής θα είναι:

$$f_{XY}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) = \frac{1}{4} e^{-\frac{x}{4}} \cdot \frac{1}{6} e^{-\frac{y}{6}} = \frac{1}{24} e^{-\frac{x}{4}} e^{-\frac{y}{6}}$$

Οπότε:

$$\begin{aligned} P(X < Y) &= \int_{x=0}^{\infty} \int_{y=x}^{\infty} \frac{1}{24} e^{-\frac{x}{4}} e^{-\frac{y}{6}} dy dx \\ &= \int_{x=0}^{\infty} \frac{1}{4} e^{-\frac{x}{4}} \left(\int_{y=x}^{\infty} \frac{1}{6} e^{-\frac{y}{6}} dy \right) dx \\ &= \frac{1}{4} \int_{x=0}^{\infty} e^{-\frac{10x}{24}} dx \\ &= \frac{1}{4} \left[-\frac{24}{10} e^{-\frac{10x}{24}} \right]_0^{\infty} \\ &= 0.6 \end{aligned}$$

- (ii) Έστω A το ενδεχόμενο ένας από τους δύο να ολοκληρώσει την εργασία τουλάχιστον μία ώρα πριν τον άλλο.

$$\begin{aligned} P(A) &= P(X + 1 < Y) + P(Y + 1 < X) \\ &= \int_{x=0}^{\infty} \int_{y=x+1}^{\infty} \frac{1}{24} e^{-\frac{x}{4}} e^{-\frac{y}{6}} dx dy + \int_{x=1}^{\infty} \int_{y=0}^{x-1} \frac{1}{24} e^{-\frac{x}{4}} e^{-\frac{y}{6}} dx dy \\ &= \int_{x=0}^{\infty} \frac{1}{4} e^{-\frac{x}{4} - \frac{x}{6} - \frac{1}{6}} dx + \int_{x=1}^{\infty} \frac{1}{4} e^{-\frac{x}{4}} dx - \int_{x=1}^{\infty} \frac{1}{4} e^{-\frac{x}{4} - \frac{x}{6} + \frac{1}{6}} dx \\ &= \frac{24}{40} e^{-\frac{1}{6}} + e^{-\frac{1}{4}} - \frac{24}{40} e^{-\frac{1}{4}} \\ &= \frac{3}{5} e^{-\frac{1}{6}} + \frac{2}{5} e^{-\frac{1}{4}} \\ &= 0.81941 \end{aligned}$$

(iii) Κώδικας MATLAB:

```
1 %% Ex 1
2 N=100000; %Number of samples
3 mA=4; %Mean time for A student
4 mB=6; %Mean time for B student
5 tA=exprnd(mA,1,N); %Random time samples for A
6 tB=exprnd(mB,1,N); %Random time samples for B
7 nA_first=sum(tA<tB); %Count A finished first
8 P1=nA_first/N %Probability
9
10 %% Ex 2
11 nA_1hour=sum(abs(tA-tB)>1);
12 p2=nA_1hour/N
```