

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

HY-217: Πιθανότητες-Χειμερινό Εξάμηνο 2022-2023
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Έκτη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 29/12/2022

Ημερομηνία Παράδοσης: 16/01/2023

ΣΗΜΑΝΤΙΚΕΣ ΟΔΗΓΙΕΣ

- Η παράδοση των ασκήσεών σας θα γίνεται ηλεκτρονικά, **ΑΠΟΚΛΕΙΣΤΙΚΑ** μέσω της σελίδας e-learn του μαθήματος, εδώ. Παραδόσεις με e-mail, ή οποιονδήποτε άλλον τρόπο δε θα γίνονται δεκτές και θα **μηδενίζονται**.
- Για την παράδοση, θα πρέπει να σκανάρετε ή να φωτογραφίσετε τις κόλλες των ασκήσεών σας και, στη συνέχεια, να φτιάξετε **ένα PDF** που θα περιλαμβάνει αυτές τις φωτογραφίες, δηλαδή το σύνολο της λυμένης σειράς ασκήσεων.
- Αριθμήστε τις σελίδες των ασκήσεών σας (από την άσκηση 1, στην άσκηση 2, στην άσκηση 3 κ.ο.κ.) και **ΣΙΓΟΥΡΕΥΤΕΙΤΕ** ότι τα σκαναρίσματα που έχετε κάνει έχουν δημιουργήσει εικόνες στις οποίες είναι **ΕΥΔΙΑΚΡΙΤΕΣ** και **ΕΥΚΟΛΟΔΙΑΒΑΣΤΕΣ** οι λύσεις σας. Θο-λές, και γενικότερα θορυβώδεις, εικόνες ενδέχεται να καταστήσουν αδύνατη τη διαδικασία της διόρθωσης και κατ' επέκταση να οδηγήσουν σε **μηδενισμό** των ασκήσεών σας.

Θέματα: Από Κοινού ΣΠΠ Πολλαπλών ΤΜ, Υπολογισμός ΣΠΠ της $Y = g(X)$, Συνδιασπορά και Συσχέτιση.

Άσκηση 1 Οι συνεχείς Τ.Μ. X και Y έχουν από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας που δίνεται από τον εξής τύπο:

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} c, & \max(x, 1-x) < y < 1, \quad 0 < x < 1 \\ c, & 0 < y < \min(x, 1-x), \quad 0 < x < 1 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

- Να σχεδιάσετε το επίπεδο (x, y) και να προσδιορίσετε την περιοχή στην οποία ισχύει $f_{XY}(x, y) \neq 0$.
- Να υπολογίσετε την τιμή της σταθεράς c .
- Να υπολογίσετε την οριακή συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_Y(y)$ και τη μέση τιμή της τ.μ. Y .

Άσκηση 2 Αν οι τυχαίες μεταβλητές X, Y έχουν κοινή συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} 8xy, & 0 \leq x \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Να βρεθούν:

- (i) $f_X(x)$
- (ii) $f_Y(y)$
- (iii) $E[X]$
- (iv) $\text{var}(X)$
- (v) $E[Y]$
- (vi) $\text{var}(Y)$
- (vii) $\rho(X, Y)$

Άσκηση 3 Η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας δύο τυχαίων μεταβλητών X και Y δίνεται από τη σχέση

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} 2e^{-x-y}, & 0 < x < y < \infty \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

- (i) Να υπολογίσετε τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της X , $f_X(x)$, καθώς επίσης και την αναμενόμενη τιμή της X , $E[X]$.
- (ii) Να προσδιορίσετε εάν οι τυχαίες μεταβλητές X και Y είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους.
- (iii) Να υπολογίσετε την πιθανότητα του γεγονότος $Y > 3X$.

Άσκηση 4. Θεωρήστε 4 Τ.Μ. W, X, Y, Z , για τις οποίες ισχύουν:

$$E[W] = E[X] = E[Y] = E[Z] = 0 \\ \text{VAR}[W] = \text{VAR}[X] = \text{VAR}[Y] = \text{VAR}[Z] = 1.$$

Επιπλέον, υποθέστε ότι οι W, X, Y, Z είναι ασυσχέτιστες ανά ζεύγη. Να υπολογιστούν οι συντελεστές συσχέτισης $\rho(A, B)$ και $\rho(A, C)$, όπου:

$$A = W + X, B = X + Y, C = Y + Z.$$

Άσκηση 5. Οι τυχαίες μεταβλητές X, Y είναι ανεξάρτητες, ισόνομες με

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Να βρεθεί η πιθανότητα οι ρίζες της εξίσωσης $z^2 - 2Xz + Y = 0$ να είναι πραγματικές.

Άσκηση 6. Δύο φοιτητές A και B ξεκινούν ταυτόχρονα και ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλο να εργάζονται στο project ενός μαθήματος. Ο χρόνος που θα χρειαστεί για να ολοκληρώσει το project ο A είναι συνεχής T.M. που ακολουθεί εκθετική κατανομή με μέση τιμή 4 ώρες. Για τον B, ο χρόνος ακολουθεί επίσης εκθετική κατανομή με μέση τιμή 6 ώρες. Δίδονται η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, η αναμενόμενη τιμή και η διασπορά της εκθετικής κατανομής:

$$f_T(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0, \quad E[T] = \frac{1}{\lambda}, \quad \text{var}(T) = \frac{1}{\lambda^2}$$

- (i) Ποια η πιθανότητα ο A να ολοκληρώσει το project πριν από τον B;
- (ii) Ποια είναι η πιθανότητα ένας από τους δύο να ολοκληρώσει το project μία τουλάχιστον ώρα πριν από τον άλλο;
- (iii) Χρησιμοποιώντας κάποια γλώσσα προγραμματισμού (προτείνεται MATLAB), για μεγάλο αριθμό επαναλήψεων του τυχαίου πειράματος, να υπολογίσετε αριθμητικά την πιθανότητα των παραπάνω ερωτημάτων.