

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2022-2023
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Ενδεικτικές Λύσεις Πέμπτης Σειράς Ασκήσεων

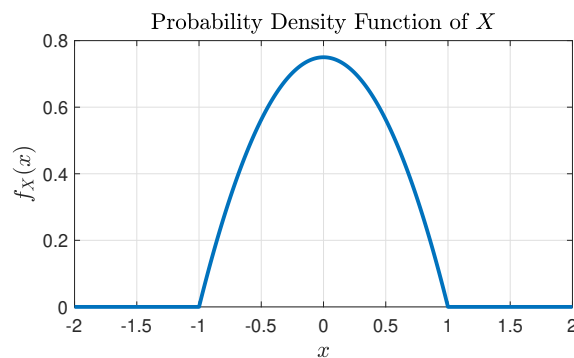
Άσκηση 1

(α) Για να είναι η $f_X(x)$ συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, πρέπει να ισχύει ότι

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = 1.$$

Άρα,

$$c \cdot \int_{-1}^{+1} (1 - x^2) dx = 1 \Rightarrow c \cdot \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^{+1} = 1 \Rightarrow c \cdot \left[1 - \frac{1}{3} - \left(-1 + \frac{1}{3} \right) \right] = 1 \Rightarrow c = \frac{3}{4}.$$



Σχήμα 1: Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_X(x)$.

(β)

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx = \int_{-1}^{+1} x \frac{3}{4} (1 - x^2) dx = \frac{3}{4} \int_{-1}^{+1} (x - x^3) dx = \frac{3}{4} \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right]_{-1}^{+1} \\ &= \frac{3}{4} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) \\ &\Rightarrow E[X] = 0. \end{aligned}$$

Υπολογίζουμε αρχικά τη 2η ροπή της X :

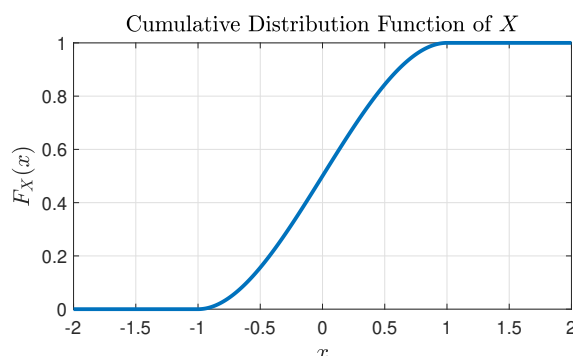
$$\begin{aligned} E[X^2] &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x) dx = \int_{-1}^{+1} x^2 \frac{3}{4} (1 - x^2) dx = \frac{3}{4} \int_{-1}^{+1} (x^2 - x^4) dx = \frac{3}{4} \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right]_{-1}^{+1} \\ &= \frac{3}{4} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) = \frac{3}{4} \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{5} \right) = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{15} \\ &\Rightarrow E[X^2] = \frac{1}{5}. \end{aligned}$$

Άρα,

$$\text{var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2 \Rightarrow \text{var}(X) = \frac{1}{5}.$$

(γ)

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt = \frac{3}{4} \cdot \int_{-1}^x (1-t^2) dt = \begin{cases} 0, & x \leq -1 \\ \frac{3}{4} \cdot \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{3}\right), & -1 < x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}.$$



Σχήμα 2: Η αθροιστική συνάρτηση πιθανότητας $F_X(x)$.

(δ) Η X είναι συνεχής τυχαία μεταβλητή, άρα $P(X = 0) = 0$.

(ε) Η ζητούμενες πιθανότητες είναι ίσες με:

$$P(0 < X < 1) = F_X(1) - F_X(0) = 1 - \frac{3}{4} \left(0 - 0 + \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{2}.$$

$$P(X > 0) = 1 - P(X \leq 0) = 1 - F_X(0) = \frac{1}{2}.$$

$$P(-0.5 < X < 0.5) = F_X(0.5) - F_X(-0.5) = \frac{3}{4} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{24} + \frac{2}{3}\right) - \frac{3}{4} \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{24} + \frac{2}{3}\right) = \frac{11}{16}.$$

Άσκηση 2

(α) i) $f_X(x) \geq 0, \forall x$.

ii)

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx &= \frac{1}{100} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{100}x} dx = \frac{1}{100} \left[-100e^{-\frac{1}{100}x} \right]_0^{+\infty} = - \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\frac{1}{100}x} - e^0 \right) \\ &\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = 1. \end{aligned}$$

Ικανοποιούνται και οι δύο συνθήκες, οπότε η $f_X(x)$ είναι έγκυρη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας.

(β) Η ζητούμενη πιθανότητα είναι ίση με

$$P(X < 100) = \frac{1}{100} \int_0^{100} e^{-\frac{1}{100}x} dx = - \left[e^{-\frac{1}{100}x} \right]_0^{100} = - (e^{-1} - e^0) = 1 - e^{-1} \approx 0.633.$$

(γ) Έστω Y ο αριθμός των υπολογιστών που λειτουργούν για λιγότερο από 100 ώρες πριν πάθουν κάποια βλάβη. Η τυχαία μεταβλητή ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή, $Y \sim \Delta(4, 0.633)$. Άρα,

$$P(Y = 1) = \binom{4}{1} (0.633)^1 (1 - 0.633)^{4-1} \approx 0.125.$$

Άσκηση 3

(α) Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} F_X(x) &= P(X \leq x) = P(\max\{X_1, X_2\} \leq x) = P(X_1 \leq x)P(X_2 \leq x) = F_{X_1}(x)F_{X_2}(x) = F_{X_i}(x)^2 \\ &\Rightarrow F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - 2e^{-x^2} + e^{-x^4}, & x \geq 0 \end{cases}. \end{aligned}$$

- (β) Παραγωγίζοντας την αθροιστική συνάρτηση κατανομής που υπολογίσαμε παραπάνω, παίρνουμε την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής X .

$$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 4x \cdot e^{-x^2} - 4x^3 \cdot e^{-x^4}, & x \geq 0 \end{cases}.$$

Άσκηση 4

- (α) Εφόσον $X \sim U[-2, 6]$, θα είναι:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{8}, & \text{αν } -2 \leq x \leq 6 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}.$$

Παρατηρούμε ότι $X^2 - 4X - 5 = (X+1)(X-5)$.
Οπότε, $X^2 - 4X - 5 > 0$ αν και μόνο αν $\{X < -1\} \cup \{X > 5\}$.
Έτσι, έχουμε:

$$\begin{aligned} P(X^2 - 4X - 5 > 0) &= P(\{X < -1\} \cup \{X > 5\} \cap \{-2 \leq X \leq 6\}) \\ &= P(\{-2 \leq X < -1\} \cup \{5 < X \leq 6\}) = P(\{-2 \leq X < -1\}) + P(\{5 < X \leq 6\}) \\ &= \frac{1}{8}(-1 - (-2)) + \frac{1}{8}(6 - 5) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \\ \Rightarrow P(X^2 - 4X - 5 > 0) &= 0.25. \end{aligned}$$

- (β) Ορίζουμε την τυχαία μεταβλητή $Z = \frac{X-500}{5} \Rightarrow Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

(i)

$$P(X \geq 490) = P\left(\frac{X-500}{5} \geq \frac{490-500}{5}\right) = P(Z \geq -2) = 1 - P(Z < -2) = 1 - \Phi(-2) = \Phi(2) = 0.9772.$$

(ii)

$$\begin{aligned} P(490 \leq X \leq 505) &= P\left(\frac{490-500}{5} \leq \frac{X-500}{5} \leq \frac{505-500}{5}\right) = P(-2 < Z < 1) \\ &= \Phi(1) - \Phi(-2) = \Phi(1) + \Phi(2) - 1 = 0.8413 + 0.9772 - 1 = 0.8185. \end{aligned}$$

Οπότε, η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$0.8185^3 = 0.54837.$$

Άσκηση 5

- (α) Η αθροιστική συνάρτηση κατανομής είναι:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \frac{E(x)}{E(r)} = \frac{\pi x^2}{\pi r^2} = \frac{x^2}{r^2}, \text{ για } 0 \leq x \leq r.$$

Άρα,

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{x^2}{r^2}, & 0 \leq x \leq r \\ 1, & x > r \end{cases}.$$

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας είναι:

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} = \begin{cases} \frac{2x}{r^2}, & 0 \leq x \leq r \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}.$$

- (β) Η μέση τιμή είναι:

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx = \frac{2}{r^2} \int_0^r x^2 dx = \frac{2}{r^2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^r \\ \Rightarrow E[X] &= \frac{2}{3}r. \end{aligned}$$

Υπολογίζουμε αρχικά τη 2η ροπή της X :

$$E[X^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x) dx = \frac{2}{r^2} \int_0^r x^3 dx = \frac{2}{r^2} \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^r = \frac{r^2}{2}.$$

Άρα,

$$\text{var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{r^2}{2} - \frac{4r^2}{9} \Rightarrow \text{var}(X) = \frac{r^2}{18}.$$

(γ) Έχουμε ότι

$$S = \begin{cases} \frac{1}{X}, & X \leq t \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases},$$

άρα η S παίρνει τιμές στο σύνολο $D_S = \{0\} \cup [\frac{1}{t}, +\infty)$, οπότε δεν είναι συνεχής τυχαία μεταβλητή. Γνωρίζουμε ότι $F_S(s) = P(S \leq s)$. Έχουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

- αν $s < \frac{1}{t}$ τότε,

$$F_S(s) = P(S = 0) = P(X > t) = \int_t^{+\infty} f_X(x) dx = \int_t^r \frac{2x}{r^2} dx = \frac{2}{r^2} \left[\frac{x^2}{2} \right]_t^r = \frac{r^2 - t^2}{r^2},$$

- αν $s \geq \frac{1}{t}$ τότε,

$$\begin{aligned} F_S(s) &= P\left(S < \frac{1}{t}\right) + P\left(\frac{1}{t} \leq S \leq s\right) = \frac{r^2 - t^2}{r^2} + P\left(\frac{1}{s} \leq \frac{1}{S} \leq t\right) = \frac{r^2 - t^2}{r^2} + P\left(\frac{1}{s} \leq X \leq t\right) \\ &= \frac{r^2 - t^2}{r^2} + \int_{1/s}^t \frac{2x}{r^2} dx = \frac{r^2 - t^2}{r^2} + \frac{1}{r^2} \left(t^2 - \frac{1}{s^2}\right) \Rightarrow F_S(s) = 1 - \frac{1}{r^2 s^2}. \end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$F_S(s) = \begin{cases} 0, & s < 0 \\ \frac{r^2 - t^2}{r^2}, & 0 \leq s \leq \frac{1}{t} \\ 1 - \frac{1}{r^2 s^2}, & s \geq \frac{1}{t} \end{cases}.$$

Άσκηση 6

(α) $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$, άρα

$$P(X \leq 1.5) = \Phi(1.5) = 0.9332.$$

$$P(X \leq -1) = 1 - \Phi(1) = 1 - 0.8413 = 0.1587.$$

(β) $Y \sim \mathcal{N}(-1, 1)$, και

$$Z = 2Y + 3 \Rightarrow E[Z] = 2E[Y] + 3 = 2 \cdot (-1) + 3 = 1$$

$$\text{var}(z) = 2^2 \text{var}(Y) = 4 \cdot 1 = 4.$$

Οπότε, $Z \sim \mathcal{N}(1, 4)$. Ορίζουμε την $X = \frac{Z-1}{2} \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Άρα, έχουμε

$$\begin{aligned} P(-1 \leq Z \leq 3) &= P\left(\frac{-1-1}{2} \leq \frac{Z-1}{2} \leq \frac{3-1}{2}\right) = P(-1 \leq X \leq 1) = P(X \leq 1) - P(X \leq -1) \\ &= \Phi(1) - (1 - \Phi(1)) = 2\Phi(1) - 1 \approx 0.6826. \end{aligned}$$

(γ) $W \sim \mathcal{N}(3, 9)$ και ορίζουμε την $X = \frac{W-3}{3} \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Οπότε, έχουμε

$$\begin{aligned} P(3 < W < 6) &= P\left(\frac{3-3}{3} < \frac{W-3}{3} < \frac{6-3}{3}\right) = P(0 < X < 1) = P(X < 1) - P(X \leq 0) \\ &= \Phi(1) - \Phi(0) = 0.8413 - 0.5 = 0.3413 \end{aligned}$$

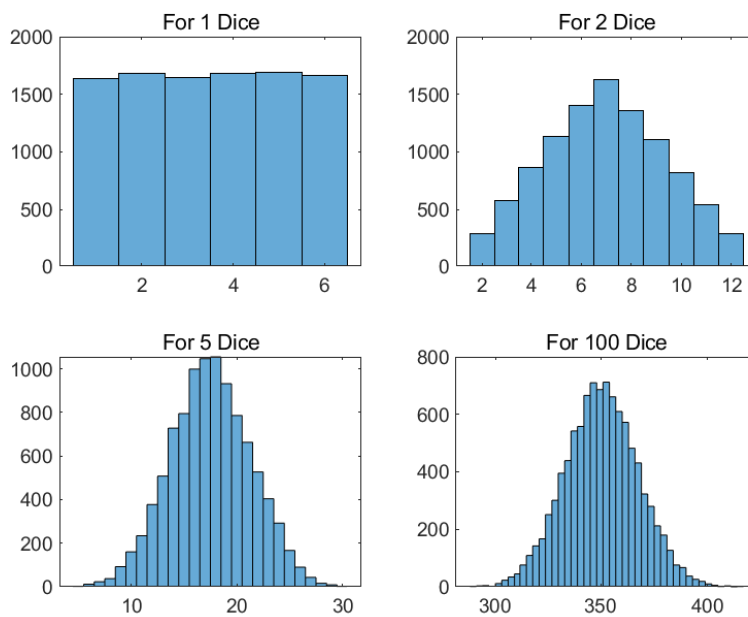
και

$$\begin{aligned} P(|W-3| > 6) &= P\left(\left|\frac{W-3}{3}\right| > \frac{6}{3}\right) = P(|X| > 2) = 1 - P(|X| \leq 2) = 1 - P(-2 \leq X \leq 2) \\ &= 1 - P(X \leq 2) + P(X \leq -2) = 1 - \Phi(2) + 1 - \Phi(2) = 2 - 2\Phi(2) = 0.0456. \end{aligned}$$

Άσκηση 7 - Προγραμματιστική

Κώδικας MATLAB:

```
1 N = 1e4;  
2 dice_num = [1 2 5 100];  
3  
4 k = 0;  
5 for d = dice_num  
6     k = k+1;  
7     X = randi(6,d,N);  
8     X_sum(k,:) = sum(X,1);  
9 end  
10  
11 figure;  
12 for k = 1:length(dice_num)  
13     subplot(2,2,k);  
14     histogram(X_sum(k,:));  
15     title(['For ' num2str(dice_num(k)), ' Dice'])  
16 end
```



Σχήμα 3: Το ιστόγραμμα για 1, 2, 5 και 100 δίκαια ζάρια.

Παρατηρούμε ότι όσο αυξάνουμε τον αριθμό των ζαριών η κατανομή πλησιάζει την κανονική.