

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2022-2023
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Πέμπτη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 07/12/2022

Ημερομηνία Παράδοσης: 21/12/2022

ΣΗΜΑΝΤΙΚΕΣ ΟΔΗΓΙΕΣ

- Η παράδοση των ασκήσεών σας θα γίνεται ηλεκτρονικά, **ΑΠΟΚΛΕΙΣΤΙΚΑ** μέσω της σελίδας e-learn του μαθήματος, **εδώ**. Παραδόσεις με e-mail, ή οποιονδήποτε άλλον τρόπο δε θα γίνονται δεκτές και θα **μηδενίζονται**.
- Για την παράδοση, θα πρέπει να σκανάρετε ή να φωτογραφίσετε τις κόλλες των ασκήσεών σας και στη συνέχεια να φτιάξετε ένα PDF που θα περιλαμβάνει αυτές τις φωτογραφίες, δηλαδή το σύνολο της λυμένης σειράς ασκήσεων.
- Αριθμήστε τις σελίδες των ασκήσεών σας (από την άσκηση 1, στην άσκηση 2, στην άσκηση 3 κ.ο.κ.) και **ΣΙΓΟΥΡΕΥΤΕΙΤΕ** ότι τα σκαναρίσματα που έχετε κάνει έχουν δημιουργήσει εικόνες στις οποίες είναι **ΕΥΔΙΑΚΡΙΤΕΣ** και **ΕΥΚΟΛΟΔΙΑΒΑΣΤΕΣ** οι λύσεις σας. Θολές, και γενικότερα θορυβώδεις, εικόνες ενδέχεται να καταστήσουν αδύνατη τη διαδικασία της διόρθωσης και κατ' επέκταση να οδηγήσουν σε μηδενισμό των ασκήσεών σας.

Άσκηση 1

Η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την ακόλουθη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (Σ.Π.Π.):

$$f_X(x) = \begin{cases} c \cdot (1 - x^2), & -1 < x < 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}.$$

- (α) Υπολογίστε την τιμή του c και σχεδιάστε τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_X(x)$.
- (β) Υπολογίστε τη μέση τιμή και τη διασπορά της X .
- (γ) Υπολογίστε και σχεδιάστε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής (Α.Σ.Κ.) $F_X(x)$.
- (δ) Υπολογίστε την πιθανότητα $P(X = 0)$.
- (ε) Υπολογίστε τις πιθανότητες $P(0 < X < 1)$, $P(X > 0)$, $P(-0.5 < X < 0.5)$.

Άσκηση 2

Έστω ότι ο χρόνος λειτουργίας ενός ηλεκτρονικού υπολογιστή (σε ώρες) πριν συμβεί κάποια βλάβη ακολουθεί την παρακάτω κατανομή:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{100} \cdot e^{-\frac{1}{100}x}, & x > 0 \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}.$$

- (α) Εξετάστε αν η παραπάνω συνάρτηση ικανοποιεί τις συνθήκες μίας συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας.
- (β) Ποιά η πιθανότητα να λειτουργήσει ένας υπολογιστής για λιγότερο από 100 ώρες πριν πάθει κάποια βλάβη;
- (γ) Ποια η πιθανότητα μεταξύ 4 υπολογιστών μόνο ένας να λειτουργήσει για λιγότερο από 100 ώρες πριν πάθει κάποια βλάβη;

Άσκηση 3

Έστω X_1 και X_2 ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με αθροιστική συνάρτηση κατανομής:

$$F_{X_i}(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-x^2}, & x \geq 0 \end{cases} \quad \text{για } i = 1, 2.$$

- (α) Βρείτε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής της τυχαίας μεταβλητής $X = \max\{X_1, X_2\}$.
- (β) Βρείτε τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής X .

Άσκηση 4

- (α) Δίνεται η τυχαία μεταβλητή $X \sim U[-2, 6]$, δηλαδή η X είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη στο διάστημα $[-2, 6]$. Υπολογίστε την πιθανότητα του γεγονότος $X^2 - 4X - 5 > 0$.
- (β) Η ποσότητα X της μπύρας που βρίσκεται σε ένα μπουκάλι 500 ml είναι τυχαία μεταβλητή με κατανομή $N(500, 25)$, δηλαδή κανονική κατανομή με μέση τιμή 500 και διασπορά 25.
 - (i) Ποιά είναι η πιθανότητα ένα μπουκάλι να περιέχει τουλάχιστον 490 ml;
 - (ii) Έστω ότι αγοράζουμε τρία μπουκάλια. Ποιά η πιθανότητα και τα τρία να περιέχουν από 490 έως 505 ml μπύρας;

Σας δίνονται οι τιμές $\Phi(1) = 0.8413$ και $\Phi(2) = 0.9772$.

Άσκηση 5

Έστω ότι παίζετε βελάκια, σε ένα στόχο με ακτίνα r . Θεωρείστε ότι τα βελάκια πετυχαίνουν πάντα τον στόχο και ότι είναι ισοπίθανο να χτυπήσουν οποιοδήποτε σημείο στο στόχο. Έστω X η απόσταση που έχει ένα βελάκι από το κέντρο του στόχου.

- (α) Βρείτε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής, $F_X(x)$, και την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, $f_X(x)$, της X .
- (β) Βρείτε τη μέση τιμή και τη διασπορά της X .
- (γ) Έστω ότι ο στόχος έχει έναν εσωτερικό κύκλο ακτίνας t . Οι βαθμοί που παίρνετε έχουν ως εξής:

$$S = \begin{cases} \frac{1}{X}, & X \leq t \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}.$$

Βρείτε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής της S . Είναι η S μια συνεχής τυχαία μεταβλητή;

Άσκηση 6

- (α) Η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή 0 και διασπορά 1. Βρείτε τις πιθανότητες $P(X \leq 1.5)$ και $P(X \leq -1)$.
- (β) Η τυχαία μεταβλητή Y ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή -1 και διασπορά 1. Η τυχαία μεταβλητή Z δίνεται από τη σχέση $Z = 2Y + 3$. Βρείτε την πιθανότητα $P(-1 \leq Z \leq 2)$.
- (γ) Η τυχαία μεταβλητή W ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή 3 και τυπική απόκλιση 3. Βρείτε τις πιθανότητες $P(3 < W < 6)$ και $P(|W - 3| > 6)$.

Σας δίνονται οι τιμές $\Phi(1) = 0.8413$, $\Phi(1.5) = 0.9332$ και $\Phi(2) = 0.9772$.

Άσκηση 7 - Προγραμματιστική

Δημιουργήστε ένα αλγόριθμο MATLAB/Python που υλοποιεί τα παρακάτω πειράματα:

- (i) Ρίχνει 1 δίκαιο ζάρι, N φορές.
- (ii) Ρίχνει 2 δίκαια ζάρια και προσθέτει τα αποτελέσματά τους, N φορές.
- (iii) Ρίχνει 5 δίκαια ζάρια και προσθέτει τα αποτελέσματά τους, N φορές.
- (iv) Ρίχνει 100 δίκαια ζάρια και προσθέτει τα αποτελέσματά τους, N φορές.

Έστω ότι $N = 10^4$. Σχεδιάστε το ιστόγραμμα των δειγμάτων για κάθε πείραμα (i)-(iv). Τι παρατηρείτε;

Μαζί με τον κώδικά σας, παραδώστε τα διαγράμματα που παράξατε, καθώς και τα σχόλια στα ερωτήματα που έχουν τεθεί.

Χρήσιμες συναρτήσεις: (MATLAB: randi, histogram - Python: numpy.random.randint, matplotlib.pyplot.hist)