

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

HY-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2022-2023
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Λύσεις Τέταρτης Σειράς Ασκήσεων

Άσκηση 1

(α) Έστω X το πλήθος ηττών που έχει ο ZAV σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή. Έχουμε διωνυμική κατανομή με $n = 15$ και $p = 0.35$. Η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - P(X = 2) - P(X = 1) - P(X = 0) = \\ 1 - \binom{15}{2} \cdot 0.35^2 \cdot 0.65^{13} - \binom{15}{1} \cdot 0.35^1 \cdot 0.65^{14} - 0.65^{15}$$

Ο αναμενόμενος αριθμός ηττών είναι $E[X] = n \cdot p = 15 \cdot 0.35 = 5.25$
και η διασπορά $var(X) = n \cdot p \cdot (1 - p) = 15 \cdot 0.35 \cdot 0.65 = 3.4125$

(β) Έστω X το πλήθος ηττών που έχει ο ZAV σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή. Έχουμε διωνυμική κατανομή με $n = 25$ και $p = 0.35$. Η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$P(X \leq 2) = P(X = 2) + P(X = 1) + P(X = 0) = \\ \binom{25}{2} \cdot 0.35^2 \cdot 0.65^{23} + \binom{25}{1} \cdot 0.35^1 \cdot 0.65^{24} + 0.65^{25}$$

(γ) Αφού γνωρίζουμε ότι ο ZAV έχει καταφέρει να χάσει το πολύ 2 αγώνες στα μισά παιχνίδια, τότε μπορούμε να αντιμετωπίσουμε τον υπόλοιπο αριθμό ηττών σαν μία νέα διωνυμική κατανομή με $n = 25$ και $p = 0.35$. Τότε η ζητούμενη πιθανότητα θα είναι η πιθανότητα εμφάνισης πρώτης επιτυχίας (για μας εδώ ήττα) (γεωμετρική κατανομή) κατά την 25ή προσπάθεια, δηλαδή: $P(k = 25) = 0.65^{24} \cdot 0.35$.

Άσκηση 2

Ο παρακάτω πίνακας δείχνει το σύνολο όλων των απόλυτων διαφορών που μπορούν να υπάρξουν στο πείραμα μας.

<i>Dice1</i> \ <i>Dice2</i>	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	3	4	5
2	1	0	1	2	3	4
3	2	1	0	1	2	3
4	3	2	1	0	1	2
5	4	3	2	1	0	1
6	5	4	3	2	1	0

Από τον πίνακα μπορούμε να δούμε ότι οι τιμές που μπορεί να πάρει η τ.μ. X είναι: $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

(α) Επίσης από τον πίνακα μπορούμε να βρούμε τη συνάρτηση μάζας πιθανότητας:

$$p_X(0) = \frac{6}{36}$$

$$p_X(1) = \frac{10}{36}$$

$$p_X(2) = \frac{8}{36}$$

$$p_X(3) = \frac{6}{36}$$

$$p_X(4) = \frac{4}{36}$$

$$p_X(5) = \frac{2}{36}$$

Άρα η συνάρτηση μάζας πιθανότητας είναι:

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{6}{36}, & x = 0 \\ \frac{10}{36}, & x = 1 \\ \frac{8}{36}, & x = 2 \\ \frac{6}{36}, & x = 3 \\ \frac{4}{36}, & x = 4 \\ \frac{2}{36}, & x = 5 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

$$(\beta) P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{6}{36} + \frac{10}{36} + \frac{8}{36} = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}$$

(γ)

$$E[X] = \sum_{x=0}^5 x p_x(x) = 0 \cdot \frac{6}{36} + 1 \cdot \frac{10}{36} + 2 \cdot \frac{8}{36} + 3 \cdot \frac{6}{36} + 4 \cdot \frac{4}{36} + 5 \cdot \frac{2}{36} = \frac{35}{18}$$

$$E[X^2] = \sum_{x=0}^5 x^2 p_x(x) = 0^2 \cdot \frac{6}{36} + 1^2 \cdot \frac{10}{36} + 2^2 \cdot \frac{8}{36} + 3^2 \cdot \frac{6}{36} + 4^2 \cdot \frac{4}{36} + 5^2 \cdot \frac{2}{36} = \frac{35}{6}$$

$$\text{var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{35}{6} - \left(\frac{35}{18}\right)^2 = \frac{665}{324}$$

Άσκηση 3

(α) $p_X(k) = P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, k = 0, 1, 2, \dots$

$$E\left[\frac{1}{X+1}\right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} p_X(k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{(k+1)!}$$

κάνοντας αλλαγή μεταβλητής $k' = k + 1$ έχουμε,

$$\sum_{k'=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k'-1} e^{-\lambda}}{k'!} = \frac{1}{\lambda} \sum_{k'=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k'} e^{-\lambda}}{k'!} = \frac{1}{\lambda} \sum_{k'=0}^{\infty} \frac{\lambda^{k'} e^{-\lambda}}{k'!} - \frac{\lambda^0 e^{-\lambda}}{0!} = \boxed{\frac{1}{\lambda}(1 - e^{-\lambda})}$$

(β) Επειδή οι τ.μ. X και Y ακολουθούν Bernoulli κατανομές, με παραμέτρους p, q αντίστοιχα, γνωρίζουμε ότι (μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε):

$$E[X] = p, E[X^2] = p, E[X^3] = p, E[Y] = q, E[Y^2] = q, E[Y^3] = q$$

Τότε εφόσον οι X, Y είναι ανεξάρτητες:

$$\begin{aligned} E[(X+Y)^3] &= E[X^3 + 3X^2Y + 3XY^2 + Y^3] = E[X^3] + 3E[X^2]E[Y] + 3E[X]E[Y^2] + E[Y^3] \\ &= p + 3pq + 3pq + q = p + q + 6pq \end{aligned}$$

(γ) Μας δίνεται ότι $E[X] = \mu$ και $\text{var}(X) = \sigma^2$.

Από αυτά μπορούμε εύκολα να βρούμε την δεύτερη ροπή της X :

$$E[X^2] = \text{var}(X) + (E[X])^2 = \sigma^2 + \mu^2$$

Επομένως

$$E[(X - \theta)^2] = E[X^2 - 2X\theta + \theta^2] = E[X^2] - 2\theta E[X] + \theta^2 = \sigma^2 + \mu^2 - 2\mu\theta + \theta^2 = \Delta(\theta)$$

Για να βρούμε την ελάχιστη τιμή του $\Delta(\theta)$, αρκεί να παραγωγίσουμε και να βρούμε που μηδενίζει η πρώτη παράγωγος της. Άρα:

$$\frac{\partial E[(X - \theta)^2]}{\partial \theta} = \frac{\partial(\sigma^2 + \mu^2 - 2\mu\theta + \theta^2)}{\partial \theta} = -2\mu + 2\theta = 0 \Rightarrow \boxed{\theta = \mu}$$

Άσκηση 4

(α)

$$\sum_k p_X(k) = 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c}{2^k} = 1 \Rightarrow c\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots\right) = 1 \Rightarrow \frac{c}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots\right) = 1 \Rightarrow$$

$$\frac{c}{2} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 1 \Rightarrow \boxed{c = 1}$$

(β)

$$P(X > 4) = 1 - P(X \leq 4) = 1 - P(X = 1) - P(X = 2) - P(X = 3) - P(X = 4) =$$

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \frac{1}{16} = \boxed{\frac{1}{16}}$$

$$P(6 \leq X \leq 8) = P(X = 6) + P(X = 7) + P(X = 8) = \boxed{\frac{7}{256}}$$

(γ)

$$E[X] = \sum_k k p_X(k) = \sum_{k=1}^{\infty} k \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} k \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = \frac{1}{2} \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2} = \boxed{2}$$

Άσκηση 5 (α) Από την εκφώνηση είναι προφανές ότι η τ.μ. X ακολουθεί Διωνυμική κατανομή: $X \sim \Delta(n = 3, p)$. Ο αναμενόμενος αριθμός δικαστών που ψηφίζουν υπέρ είναι $E[X] = 3p$.

(β) Καθώς το σώμα αποφασίζει κατά πλειοψηφία, η απόφαση είναι “υπέρ” αν τουλάχιστον 2 στους 3 δικαστές αποφασίσουν “υπέρ”:

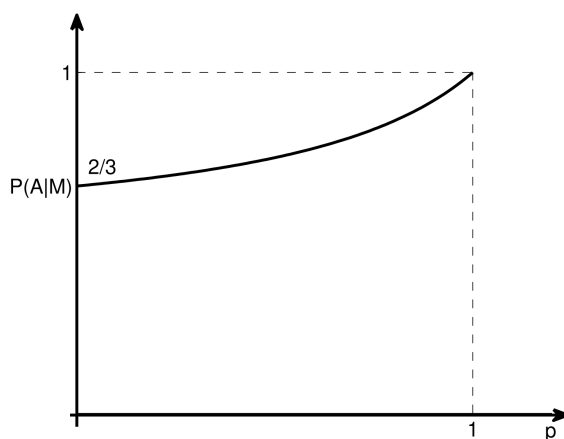
$$\begin{aligned} P(M) = P(X \geq 2) &= P(X = 2) + P(X = 3) \\ &= \binom{3}{2} p^2 (1-p)^1 + \binom{3}{3} p^3 (1-p)^0 \\ &= 3p^2 - 2p^3 \end{aligned}$$

(γ) Δεδομένου του A , ότι ο πρώτος δικαστής ψήφισε “υπέρ”, η απόφαση του σώματος είναι “υπέρ” αν ένας τουλάχιστον από τους άλλους δύο δικαστές ψήφισαν “υπέρ”. Επομένως,

$$\begin{aligned} P(M|A) &= \binom{2}{1} p(1-p) + \binom{2}{2} p^2 (1-p)^0 \\ &= 2p(1-p) + p^2 \\ &= 2p - p^2 \end{aligned}$$

(δ) Ζητάμε την πιθανότητα του γεγονότος ο πρώτος δικαστής να ψηφίσει “υπέρ” δεδομένου ότι το σώμα ψήφισε “υπέρ”. Χρησιμοποιούμε τον κανόνα του Bayes:

$$P(A|M) = \frac{P(A) \cdot P(M|A)}{P(M)} = \frac{p(2p - p^2)}{3p^2 - 2p^3} = \frac{2 - p}{3 - 2p}$$



Το όριο καθώς $p \rightarrow 0$ είναι $P(A|M) = 2/3$. Αυτό έχει νόημα καθώς όταν το p είναι πολύ μικρό, ο πιο πιθανός τρόπος το σώμα να κατάλήξει σε “υπέρ” είναι οι δύο δικαστές να ψηφίσουν “υπέρ” και ο ένας “κατά”, οπότε και η δεσμευμένη πιθανότητα ο πρώτος να ψηφίσει “υπέρ” τείνει στο $2/3$.

Το όριο καθώς $p \rightarrow 1$ είναι $P(A|M) = 1$. Πράγματι, καθώς $p \rightarrow 1$, τότε με πιθανότητα 1 και οι 3 δικαστές ψηφίζουν “υπέρ”. Επομένως $P(M) \rightarrow 1$ και παίρνουμε τη δεσμευμένη πιθανότητα του A ως προς ένα γεγονός (το M) με πιθανότητα κοντά στο 1. Σε αυτή την περίπτωση $P(A|M) \approx P(A) = p \rightarrow 1$.

Άσκηση 6

(α) Προσθέτουμε όλες τις τιμές του πίνακα και θέτουμε το άθροισμα ίσο με 1.

$$20c = 1 \rightarrow c = \frac{1}{20}.$$

(β) $P(Y < X) = c + 6c + 4c = 11c = 11/20$.

$y = 3$	c	c	$2c$
$y = 2$	$2c$	0	$4c$
$y = 1$	$3c$	c	$6c$
	$x = 1$	$x = 2$	$x = 3$

(γ) $P(Y > X) = 2c + c + c = 4c = 1/5$.

$y = 3$	c	c	$2c$
$y = 2$	$2c$	0	$4c$
$y = 1$	$3c$	c	$6c$
	$x = 1$	$x = 2$	$x = 3$

(δ) $P(Y = X) = 1 - P(Y < X) - P(Y > X) = 1 - \frac{11}{20} - \frac{1}{5} = 1/4$

(ε) $P(Y = 3) = c + c + 2c = 4c = 1/5$.

$y = 3$	c	c	$2c$
$y = 2$	$2c$	0	$4c$
$y = 1$	$3c$	c	$6c$
	$x = 1$	$x = 2$	$x = 3$

(στ)

$$p_X(x) = \begin{cases} 3/10, & x = 1 \\ 1/10, & x = 2 \\ 3/5, & x = 3 \end{cases} \quad p_Y(y) = \begin{cases} 1/2, & y = 1 \\ 3/10, & y = 2 \\ 1/5, & y = 3 \end{cases}$$

(ζ)

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[X] &= \frac{3}{10} \cdot 1 + \frac{1}{10} \cdot 2 + \frac{3}{5} \cdot 3 = 2.3 \\ \mathbf{E}[Y] &= \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{3}{10} \cdot 2 + \frac{1}{5} \cdot 3 = 1.7 \end{aligned}$$

(η)

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[X^2] &= \frac{3}{10} \cdot 1 + \frac{1}{10} \cdot 4 + \frac{3}{5} \cdot 9 = 6.1 \\ \mathbf{E}[Y^2] &= \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{3}{10} \cdot 4 + \frac{1}{5} \cdot 9 = 3.5 \\ \text{var}(X) &= \mathbf{E}[X^2] - (\mathbf{E}[X])^2 = 6.1 - 2.3^2 = 0.81 \\ \text{var}(Y) &= \mathbf{E}[Y^2] - (\mathbf{E}[Y])^2 = 3.5 - 1.7^2 = 0.61 \end{aligned}$$