

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2022-2023
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Τέταρτη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 16/11/2022

Ημερομηνία Παράδοσης: 30/11/2022

ΣΗΜΑΝΤΙΚΕΣ ΟΔΗΓΙΕΣ

- Η παράδοση των ασκήσεών σας θα γίνεται ηλεκτρονικά, **ΑΠΟΚΛΕΙΣΤΙΚΑ** μέσω της σελίδας e-learn του μαθήματος, **εδώ**. Παραδόσεις με e-mail, ή οποιονδήποτε άλλον τρόπο δε θα γίνονται δεκτές και θα **μηδενίζονται**.
- Για την παράδοση, θα πρέπει να σκανάρετε ή να φωτογραφίσετε τις κόλλες των ασκήσεών σας και στη συνέχεια να φτιάξετε ένα PDF που θα περιλαμβάνει αυτές τις φωτογραφίες, δηλαδή το σύνολο της λυμένης σειράς ασκήσεων.
- Αριθμήστε τις σελίδες των ασκήσεών σας (από την άσκηση 1, στην άσκηση 2, στην άσκηση 3 κ.ο.κ.) και **ΣΙΓΟΥΡΕΥΤΕΙΤΕ** ότι τα σκαναρίσματα που έχετε κάνει έχουν δημιουργήσει εικόνες στις οποίες είναι **ΕΥΔΙΑΚΡΙΤΕΣ** και **ΕΥΚΟΛΟΔΙΑΒΑΣΤΕΣ** οι λύσεις σας. Θολές, και γενικότερα θορυβώδεις, εικόνες ενδέχεται να καταστήσουν αδύνατη τη διαδικασία της διόρθωσης και κατ' επέκταση να οδηγήσουν σε μηδενισμό των ασκήσεών σας.

Άσκηση 1

Το League of Legends , γνωστό ως LoL, είναι ένα διαδικτυακό βιντεοπαιχνίδι μάχης αρένας πολλαπλών παικτών, όπου οι παίκτες διαμορφώνονται σε 2 ομάδες των πέντε ηρώων σε κάθε ομάδα. Κάθε ομάδα ξεκινά σε δύο αντίθετες πλευρές του χάρτη και ένας αγώνας κερδίζεται όταν είτε το nexus καταστραφεί είτε η αντίπαλη ομάδα παραδοθεί. Ο ZAV είναι φοιτητής στο CSD αλλά επειδή βαριέται να κάνει τις ασκήσεις του, προτιμάει να παίζει LoL με τους φίλους του. Ο ZAV, επειδή είναι πολύ καλός στο παιχνίδι, έχει πιθανότητα 65% να κερδίσει οποιοδήποτε αγώνα που παίζει και μπορεί να παίξει το πολύ 50 αγώνες την ημέρα.

(α) Ο ZAV ξεκινάει την ημέρα του παίζοντας πρώτα 15 αγώνες. Αφού παίζει αυτούς τους αγώνες, αν έχει χάσει τουλάχιστον 3 τότε σταματάει και αρχίζει να διαβάζει ΗΥ-217 μέχρι το τέλος της ημέρας, αλλιώς συνεχίζει να παίζει. Ποια η πιθανότητα να σταματήσει να παίζει; Ποιος είναι ο αναμενόμενος αριθμός ηττών που θα έχει σε αυτούς τους 15 πρώτους αγώνες και ποια η διασπορά;

(β) Όταν ο ZAV φτάσει στα μισά παιχνίδια που μπορεί να παίξει την ημέρα, υπολογίζει πόσες ήττες έχει σε αυτούς τους αγώνες. Αν έχει χάσει το πολύ 2 αγώνες, τότε συνεχίζει να παίζει αλλιώς σταματά εκεί και πάει για ύπνο. Ποια η πιθανότητα να συμβεί αυτό;

(γ) Θεωρώντας ότι έχει καταφέρει να χάσει το πολύ 2 αγώνες στα μισά παιχνίδια, για να θεωρήσει την μέρα επιτυχημένη θα πρέπει να μην έχει καμία άλλη ήττα στα υπόλοιπα παιχνίδια που του μένουν. Ποια η πιθανότητα η μέρα να μην θεωρηθεί επιτυχημένη στον τελευταίο αγώνα που θα παίζει;

Άσκηση 2

Ο Μπάμπης και ο Μήτσος ρίχνουν δύο δίκαια εξαέδρα ζάρια, ένα ο καθένας. Έστω X η απόλυτη διαφορά των αριθμών που έτυχαν τα δύο αυτά ζάρια.

(α) Βρείτε και σχεδιάστε την Συνάρτηση Μάζας Πιθανότητας της τ.μ. X .

(β) Βρείτε την πιθανότητα $P(X \leq 2)$

(γ) Βρείτε την μέση τιμή $E[X]$ και την διασπορά $var(X)$ της τ.μ. X .

Άσκηση 3

(α) Αν $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$, υπολογίστε το $E[\frac{1}{X+1}]$

Hint: Κάντε αλλαγή μεταβλητής στο άθροισμα και χρησιμοποιείτε την συνθήκη κανονικοποίησης.

(β) Αν $X \sim \text{Bernoulli}(p)$ και $Y \sim \text{Bernoulli}(q)$, υπολογίστε το $E[(X + Y)^3]$ αν X, Y είναι ανεξάρτητα.

(γ) Έστω X μια τ.μ. με μέση τιμή $E[X] = \mu$ και διασπορά $var(X) = \sigma^2$. Έστω επίσης $\Delta(\theta) = E[(X - \theta)^2]$. Βρείτε εκείνο το θ που ελαχιστοποιεί το $\Delta(\theta)$.

Άσκηση 4

Έστω X μία τ.μ. με συνάρτηση μάζας πιθανότητας $p_X(k) = \frac{c}{2^k}$ για $k = 1, 2, \dots$

(α) Βρείτε την τιμή του c

(β) Βρείτε τις πιθανότητες $P(X > 4)$ και $P(6 \leq X \leq 8)$

(γ) Βρείτε την μέση τιμή της X , $E[X]$.

Άσκηση 5

Ένα σώμα 3 δικαστών πρέπει να πάρει μία απόφαση υπέρ ή κατά. Η απόφαση παίρνεται κατά πλειοψηφία. Κάθε δικαστής ψηφίζει, μυστικά και ανεξάρτητα από τους υπόλοιπους, υπέρ με πιθανότητα p . Ορίζουμε το γεγονός M ότι η απόφαση του σώματος είναι υπέρ (δηλαδή, η πλειοψηφία των δικαστών ψήφισε υπέρ), και το γεγονός A ότι ο πρώτος δικαστής ψήφισε υπέρ.

(α) Τι κατανομή ακολουθεί η τ.μ. X , ο αριθμός των δικαστών που ψηφίζει υπέρ; Ποιος είναι ο αναμενόμενος αριθμός των δικαστών που ψηφίζουν υπέρ;

(β) Υπολογίστε την πιθανότητα $P(M)$.

(γ) Υπολογίστε τη δεσμευμένη πιθανότητα $P(M/A)$.

(δ) Υπολογίστε τη δεσμευμένη πιθανότητα $P(A/M)$. Δώστε τη γραφική παράσταση της $P(A/M)$ ως συνάρτηση του p . Ποια είναι τα όρια της $P(A/M)$ καθώς $p \rightarrow 0$ και $p \rightarrow 1$. Με δύο προτάσεις σχολιάστε αυτά τα όρια.

Άσκηση 6

Η από κοινού συνάρτηση πιθανότητας των τ.μ. X, Y δίνεται από τον παρακάτω πίνακα:

$y = 3$	c	c	$2c$
$y = 2$	$2c$	0	$4c$
$y = 1$	$3c$	c	$6c$
	$x = 1$	$x = 2$	$x = 3$

- (α) Βρείτε την τιμή της σταθεράς c .
- (β) Βρείτε την $P(Y < X)$.
- (γ) Βρείτε την $P(Y > X)$.
- (δ) Βρείτε την $P(Y = X)$.
- (ε) Βρείτε την $P(Y = 3)$.
- (στ) Βρείτε τις περιθωριακές συναρτήσεις πιθανότητας $p_X(x)$ και $p_Y(y)$.
- (ζ) Βρείτε τις μέσες τιμές $E[X]$, $E[Y]$.
- (η) Βρείτε τις διασπορές $var(X)$, $var(Y)$.

Άσκηση 7 - Προγραμματιστική

- (α) Για $\lambda = 1$ και για τέσσερις ακόμη τιμές της επιλογής σας, σχεδιάστε μία Poisson κατανομή και σχολιάστε σχετικά με την "επιρόη" της τιμής του λ στη συγκεκριμένη κατανομή.
- (β) Για $n = 10$ και $p = 0.3$ σχεδιάστε στο ίδιο διάγραμμα τις αντίστοιχες Poisson και Διωνυμική. Επαναλάβετε για $n = 100$ και $p = 0.2$, για $n = 1000$ και $p = 0.1$ και για $n = 10000$ και $p = 0.01$. Για όλες τις διαφορετικές περιπτώσεις, σχολιάστε τα αποτελέσματα που προέκυψαν.

Μαζί με τον κώδικά σας, παραδώστε τις εικόνες/διαγράμματα που παράξατε, καθώς και τα σχόλια στα ερωτήματα που έχουν τεθεί.

Χρήσιμες συναρτήσεις: (MATLAB: binopdf, poisspdf - Python: scipy.stats.binom, scipy.stats.poisson)