

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

HY-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2022-2023

Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Λύσεις Τρίτης Σειράς Ασκήσεων

Άσκηση 1.

- (α) Υποθέστε ότι δεν επιτρέπονται οι επαναλήψεις. Πόσοι τετραψήφιοι αριθμοί είναι δυνατόν να σχηματιστούν από τα ψηφία 1, 2, 3, 5, 7, 8;
- (β) Πόσοι από αυτούς είναι μικρότεροι από 4000;
- (γ) Πόσοι από αυτούς είναι άρτιοι;
- (δ) Πόσοι από αυτούς είναι περιττοί;
- (ε) Πόσοι από αυτούς είναι πολλαπλάσια του 5;
- (στ) Πόσοι από αυτούς περιέχουν και το ψηφίο 3 και το ψηφίο 5;

Λύση:

- (α) Εφόσον θέλουμε να σχηματίσουμε τετραψήφιο αριθμό, πρέπει να κάνουμε τέσσερις επιλογές, μία για κάθε ψηφίο. Για το πρώτο ψηφίο έχουμε έξι πιθανές επιλογές (1 ή 2 ή 3 ή 5 ή 7 ή 8). Για το δεύτερο ψηφίο, αφού δεν επιτρέπουμε επαναλήψεις, αφού επιλέξουμε το πρώτο ψηφίο, έχουμε πια πέντε πιθανές επιλογές (όλα εκτός τον αριθμό που επιλέξαμε για το πρώτο ψηφίο). Ομοίως, για το τρίτο ψηφίο έχουμε τέσσερις επιλογές και για το τέταρτο τρεις. Άρα από την αρχή της απαρίθμησης έχουμε συνολικά $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$ τετραψήφιους αριθμούς.
- (β) Για να είναι ένας τετραψήφιος αριθμός μικρότερος από το 4000 πρέπει το πρώτο ψηφίο του να είναι μικρότερο του 4. Επομένως εδώ οι πιθανές επιλογές για το πρώτο ψηφίο είναι 1 ή 2 ή 3, άρα τρεις. Για τα υπόλοιπα ψηφία δεν έχουμε κάποιον έξτρα περιορισμό, άρα όπως στο α ερώτημα, οι επιλογές για το δεύτερο ψηφίο είναι πέντε κ.ο.κ.. Άρα συνολικά έχουμε $3 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 180$ αριθμούς.
- (γ) Για να είναι άρτιος ένας αριθμός πρέπει το τελευταίο ψηφίο του να είναι 0, 2, 4, 6, ή 8. Επομένως, στην περίπτωσή μας το τελευταίο ψηφίο μπορεί να είναι 2 ή 8, άρα έχουμε δύο πιθανές επιλογές. Αφού έχουμε επιλέξει το τελευταίο ψηφίο, για το πρώτο ψηφίο έχουμε πια πέντε πιθανές επιλογές, για το δεύτερο τέσσερις και για το τρίτο τρεις. Άρα συνολικά $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$ αριθμούς.
- (δ) Οι περιττοί αριθμοί είναι αυτοί που δεν είναι άρτιοι, άρα μπορούν να υπολογιστούν ως ΟΛΟΙ - ΑΡΤΙΟΙ, δηλαδή $360 - 120 = 140$ αριθμοί. (Εναλλακτικά, μπορούν να υπολογιστούν όπως στο γ, με πιθανές επιλογές για το τελευταίο ψηφίο τους 1, 3, 5, 7)
- (ε) Για να είναι ένας αριθμός πολλαπλάσιο του 5 πρέπει το τελευταίο ψηφίο να είναι 0 ή 5. Άρα στην περιπτωσή μας μοναδική επιλογή για το τελευταίο ψηφίο είναι το 5. Ομοίως με το γ λοιπόν συνολικά θα έχουμε $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 1 = 60$ αριθμούς.

- (στ) Υπάρχουν διάφοροι τρόποι επίλυσης αυτού του ερωτήματος. Ένας από αυτούς είναι ο εξής. Επιλέγουμε αρχικά σε ποια θέση θα βρίσκεται το 3. Προφανώς έχουμε 4 πιθανές επιλογές (το 3 να είναι το πρώτο ψηφίο, το δεύτερο, το τρίτο ή το τέταρτο). Έπειτα επιλέγουμε σε ποια θέση θα είναι το 5. Τώρα θα έχουμε μόνο τρεις επιλογές (αφού έχουμε ήδη τοποθετήσει το 3 σε μία θέση). Στην συνέχεια επιλέγουμε αριθμό για τα υπόλοιπα δύο ψηφία, που δεν μπορούν να είναι 3 ή 5, άρα θα έχουμε τέσσερις και τρεις επιλογές. Άρα συνολικά έχουμε $4 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3 = 144$ αριθμούς.

Άσκηση 2. Μια αντιπροσωπεία τεσσάρων φοιτητών πρέπει να επιλεγεί από ένα σύνολο 12 φοιτητών, για να παρακολουθήσει ένα συμβούλιο.

- (α) Με πόσους τρόπους μπορεί να επιλεγεί η αντιπροσωπεία;
- (β) Επαναλάβετε το α ερώτημα, εάν υπάρχουν δύο φοιτητές που αρνούνται να είναι μαζί.
- (γ) Επαναλάβετε το α ερώτημα, εάν υπάρχουν δύο φοιτητές που θα παρακολουθήσουν το συμβούλιο μόνο εάν είναι στην αντιπροσωπεία μαζί.
- (δ) Επαναλάβετε το α ερώτημα, εάν υπάρχουν δύο φοιτητές που αρνούνται να είναι στην αντιπροσωπεία μαζί και δύο άλλοι φοιτητές που θα παρακολουθήσουν το συμβούλιο μόνο εάν είναι μαζί.

Λύση:

- (α) Θέλουμε να επιλέξουμε 4 φοιτητές από ένα σύνολο 12 φοιτητών. Άρα $\binom{12}{4} = \frac{12!}{4!8!} = 495$ τρόποι.
- (β) Ένας τρόπος επίλυσης είναι να σκεφτούμε ότι οι τρόποι να επιλέξουμε την επιτροπή, ώστε να μην συμμετέχουν συγχρόνως οι δύο αυτοί φοιτητές, ισούνται με όλους τους τρόπους μείον τους τρόπους ώστε να συμμετέχουν και οι δύο συγχρόνως. Αυτούς μπορούμε να τους υπολογίσουμε, διαλέγοντας απλά τα δύο άλλα μέλη της επιτροπής ανάμεσα στους 10 υπόλοιπους φοιτητές. Άρα $\binom{10}{2} = \frac{10!}{2!8!} = 45$. Επομένως οι τρόποι, ώστε οι δύο φοιτητές να μην είναι μαζί είναι $495 - 45 = 450$.
- (γ) Εδώ έχουμε δύο αποδεκτές αλληλοαποκλειόμενες περιπτώσεις. Η πρώτη είναι να συμμετέχουν συγχρόνως και οι δύο φοιτητές (όπως υπολογίστηκε παραπάνω έχουμε 45 τρόπους) και η δεύτερη είναι να μην συμμετέχει κανένας από τους δύο, επομένως πρέπει να διαλέξουμε τέσσερα άτομα από τα υπόλοιπα 10, δηλαδή $\binom{10}{4} = \frac{10!}{4!6!} = 210$ τρόποι. Άρα συνολικά υπάρχουν $45 + 210 = 255$ τρόποι.
- (δ) Ας ονομάσουμε τους φοιτητές που θα παρακολουθήσουν μόνο αν είναι μαζί Α και Β και τους φοιτητές που αρνούνται να παρακολουθήσουν μαζί Γ και Δ. Αρχικά έχουμε δυο αλληλοαποκλειόμενα ενδεχόμενα α) να συμμετέχουν ο Α και ο Β και β) να μην συμμετεχει ούτε ο Α ούτε ο Β. Ας τα μελετήσουμε ξεχωριστά.
- α) Η αντιπροσωπεία έχει ήδη δύο μέλη, άρα αρκεί να επιλέξουμε τα άλλα δύο. Είδαμε στο γ ερώτημα ότι οι τρόποι να συμβεί αυτό είναι 45. Από αυτούς πρέπει να αφαιρέσουμε τις περιπτώσεις οι Γ και Δ να συμμετέχουν συγχρόνως. Προφανώς αυτή είναι μοναδική, όπου η αντιπροσωπεία είναι οι Α,Β,Γ,Δ. Άρα εδώ έχουμε συνολικά $45 - 1 = 44$ τρόπους επιλογής.
- β) Εδώ πρέπει να επιλέξουμε τέσσερα μέλη από τους υπόλοιπους 10 φοιτητές. Προφανώς αυτό ισούται με $\binom{10}{4} = \frac{10!}{4!6!} = 210$. Από αυτούς τους πιθανούς τρόπους πρέπει να αφαιρέσουμε τις περιπτώσεις που ο Γ και Δ συμμετέχουν και οι δυο (δηλαδή η αντιπροσωπεία αποτελείται από τους Γ και Δ και φάχνουμε άλλα δύο μέλη από τους υπόλοιπους 8). Οι τρόποι αυτοί είναι ίσοι με $\binom{8}{2} = \frac{8!}{2!6!} = 28$. Άρα τελικά έχουμε $210 - 28 = 182$.

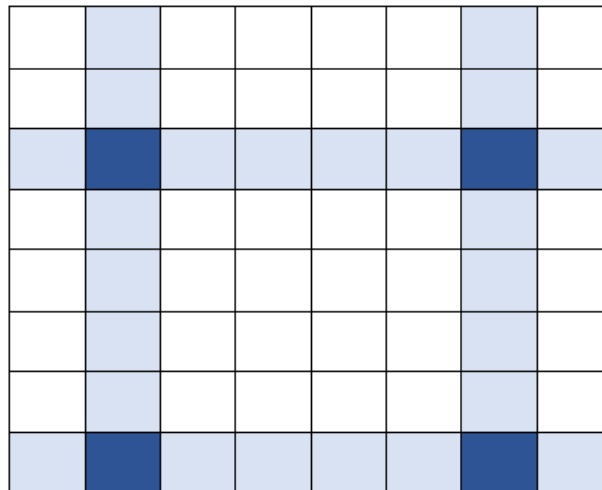
Επομένως συνολικά έχουμε $44+182 = 226$ τρόπους επιλογής.

Άσκηση 3.

- (α) Με πόσους τρόπους είναι δυνατόν να επιλεγούν δύο τετράγωνα από μια 8×8 σκακιέρα, έτσι ώστε να μην βρίσκονται ούτε στην ίδια γραμμή ούτε στην ίδια στήλη;
- (β) Με πόσους τρόπους είναι δυνατόν να επιλεγούν τέσσερα τετράγωνα από μια 8×8 σκακιέρα, έτσι ώστε να σχηματίζουν ένα παραλληλόγραμμο;

Λύση:

- (α) Επιλέγουμε τυχαία το πρώτο τετράγωνο στην σκακιέρα. Αφού η σκακιέρα έχει συνολικά 64 τετράγωνα, έχουμε 64 πιθανές επιλογές. Για την επιλογή του δεύτερου τετραγώνου πρέπει να λάβουμε υπόψιν τον περιορισμό "να μην είναι στην ίδια γραμμή ή στήλη" και άρα να εξαιρέσουμε τα τετράγωνα που βρίσκονται στην γραμμή και την στήλη του πρώτου τετραγώνου. Συνολικά λοιπόν εξαιρούμε $7 + 7 = 14$ τετράγωνα και εξαιρούμε βέβαια συγχρόνως και το ίδιο το πρώτο τετράγωνο, άρα 15. Οι επιλογές μας άρα είναι $64 - 15 = 49$. Άρα οι τρόποι επιλογής είναι $64 \cdot 49 = 3136$. Επειδή δεν μας ενδιαφέρει η σειρά επιλογής των τετραγώνων, πρέπει να διαιρέσουμε με το $2! = 2$. Επομένως έχουμε $3136/2 = 1568$ επιλογές.
- (β) Η λύση αυτού του ερωτήματος είναι εύκολη εάν σκεφτούμε ότι ουσιαστικά πρέπει να επιλέξουμε δύο γραμμές και δύο στήλες της σκακιέρας, αφού οι τομές τους προσδιορίζουν ακριβώς τέσσερα τετράγωνα που σχηματίζουν ένα παραλληλόγραμμο.



Οι τρόποι να επιλέξουμε δύο γραμμές από τις οχτώ είναι $\binom{8}{2} = \frac{8!}{2!6!} = 28$. Ομοίως και για τις στήλες, επομένως συνολικά έχουμε $28 \cdot 28 = 784$ τρόπους.

Άσκηση 4.

Μια φοιτήτρια πρέπει να απαντήσει σε τουλάχιστον 8 από τις 10 ερωτήσεις ενός διαγωνίσματος.

- (α) Πόσες επιλογές έχει η φοιτήτρια;
- (β) Πόσες επιλογές έχει, αν πρέπει να απαντήσει στις τρεις πρώτες ερωτήσεις;
- (γ) Πόσες επιλογές έχει, εαν πρέπει να απαντήσει σε τουλάχιστον τέσσερις από τις πέντε πρώτες ερωτήσεις;

Λύση:

(α) Η φοιτήτρια μπορεί να γράψει ακριβώς οχτώ ερωτήσεις με $\binom{10}{8} = \frac{10!}{2!8!} = 45$ τρόπους, ακριβώς εννιά ερωτήσεις με $\binom{10}{9} = \frac{10!}{1!9!} = 10$ τρόπους και ακριβώς δέκα ερωτήσεις με έναν τρόπο. Άρα συνολικά $45+10+1 = 56$

(β) Εάν η φοιτήτρια γράψει οχτώ ερωτήσεις πρέπει να επιλέξει ακόμη πέντε από τις υπόλοιπες εφτά άρα έχει $\binom{7}{5} = \frac{7!}{2!5!} = 21$ τρόπους. Εάν επιλέξει να γράψει εννιά ερωτήσεις πρέπει να επιλέξει άλλες έξι από τις υπόλοιπες εφτά, άρα έχει $\binom{7}{6} = \frac{7!}{1!6!} = 7$ τρόπους. Εάν επιλέξει να τις γράψει όλες τότε πάλι έχει 1 τρόπο. Άρα συνολικά $21 + 7 + 1 = 29$.

(γ) Εάν η φοιτήτρια επιλέξει να γράψει οχτώ ερωτήσεις:

Αφού πρέπει να γράψει τουλάχιστον τέσσερις από τις πέντε πρώτες, μπορεί να επιλέξει είτε να γράψει τέσσερις είτε πέντε από αυτές. Εάν γράψει τέσσερις, τότε αρχικά επιλέγει τέσσερις από τις πέντε πρώτες με $\binom{5}{4} = \frac{5!}{1!4!} = 5$ τρόπους και στην συνέχεια επιλέγει ακόμη τέσσερις από τις υπόλοιπες πέντε με $\binom{5}{4} = \frac{5!}{1!4!} = 5$ τρόπους. Άρα έχει $5 \cdot 5 = 25$ τρόπους συνολικά. Εάν γράψει και τις πέντε πρώτες τότε αρκεί να επιλέξει άλλες τρεις από τις υπόλοιπες 5, με $\binom{5}{3} = \frac{5!}{2!3!} = 10$ τρόπους. Άρα όλοι οι πιθανοί τρόποι είναι $25 + 10 = 35$.

Εάν η φοιτήτρια επιλέξει να γράψει εννιά ερωτήσεις:

Πάλι αφού πρέπει να γράψει τουλάχιστον τέσσερις από τις πέντε πρώτες, μπορεί να επιλέξει είτε να γράψει τέσσερις είτε πέντε από αυτές. Εάν γράψει τέσσερις, τότε αρχικά επιλέγει τέσσερις από τις πέντε πρώτες με $\binom{5}{4} = \frac{5!}{1!4!} = 5$ τρόπους και στην συνέχεια επιλέγει ακόμη πέντε από τις υπόλοιπες πέντε με $\binom{5}{5} = \frac{5!}{1!5!} = 1$ τρόπο. Άρα έχει $5 \cdot 1 = 5$ τρόπους συνολικά. Εάν γράψει και τις πέντε πρώτες τότε αρκεί να επιλέξει άλλες τέσσερις από τις υπόλοιπες 5, με $\binom{5}{4} = \frac{5!}{1!4!} = 5$ τρόπους. Άρα όλοι οι πιθανοί τρόποι είναι $5 + 5 = 10$.

Εάν η φοιτήτρια γράψει και τις δέκα ερωτήσεις προφανώς υπάρχει μόνο 1 τρόπος να το κάνει.

Άρα συνολικά $35+10+1=46$ τρόποι.

Παρατήρηση: Υπάρχουν και άλλοι τρόποι επίλυσης, αλλά προσέξτε σε ερωτήσεις που περιέχουν την λέξη "τουλάχιστον" να μην διπλομετράτε

Άσκηση 5.

(α) Δείξτε ότι ο συνολικός αριθμός των μεταθέσεων που περιλαμβάνουν p κόκκινες μπάλες με 0 ή 1 ή 2,..., ή q άσπρες μπάλες είναι

$$\frac{p!}{p!} + \frac{(p+1)!}{p!1!} + \frac{(p+2)!}{p!2!} + \dots + \frac{(p+q)!}{p!q!}$$

(β) Δείξτε ότι το άθροισμα στο τμήμα (α) είναι ίσο με

$$\frac{(p+q+1)!}{(p+1)!q!}$$

Λύση:

(α) Υποθέτουμε ότι έχουμε k άσπρες μπάλες. Οι πιθανές μεταθέσεις με τις p κόκκινες είναι

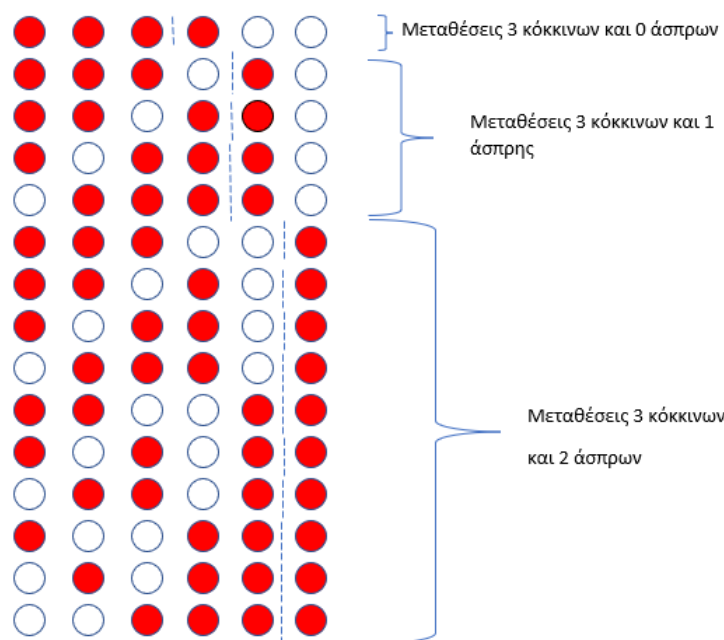
$$\frac{(p+k)!}{p!k!}$$

Αφού τα ενδεχόμενα να έχουμε k άσπρες μπάλες και να έχουμε l άσπρες μπάλες με $k \neq l$ είναι αλληλοαποκλειόμενα ο ζητούμενος αριθμός μεταθέσεων είναι:

$$\sum_{k=0}^q \frac{(p+k)!}{p!k!} = \frac{p!}{p!} + \frac{(p+1)!}{p!1!} + \frac{(p+2)!}{p!2!} + \dots + \frac{(p+q)!}{p!q!}$$

(β) Θα το σκεφτούμε ως εξής. Παρατηρούμε ότι το αποτέλεσμα στο οποίο θέλουμε να καταλήξουμε είναι οι μεταθέσεις $p+1$ κόκκινων μπαλών και q άσπρων. Ας σκεφτούμε γιατί το πρόβλημα στο ερώτημα α είναι ισοδύναμο με αυτό και άρα έχουν την ίδια λύση. Σκεφτόμαστε όλες τις πιθανές μεταθέσεις $p+1$ κόκκινων μπαλών και q άσπρων, εάν σε κάποια από αυτές 'κόψουμε' πριν την $p+1$ κόκκινη μπάλα τότε θα έχουμε μία μετάθεση από p κόκκινες μπάλες και κάποιες άσπρες (προφανώς από 0 έως q), ανάλογα το πόσες έτυχε να βρίσκονται αριστερότερα της $p+1$ κόκκινης μπάλας. Άρα ανάλογα την θέση της $p+1$ κόκκινης μπάλας μπορεί να έχουμε μεταθέσεις p κόκκινων και $0,1,2,\dots,q$ άσπρων. Και αυτό ακριβώς είναι το ζητούμενο.

Παρακάτω βλέπουμε ένα παραδείγμα για $p=3$ και $q=2$. Φτιάχνουμε όλες τις μεταθέσεις 4 κόκκινων και 2 άσπρων μπαλών και κρατάμε το τμήμα αριστερά από την 4η κόκκινη μπάλα.



Άσκηση 6.

Η σ.π.π. της τ.μ. X δίνεται από την σχέση: $f(x) = c(\frac{1}{3})^x$, για $x = 0, 1, \dots$, όπου c θετική σταθερά.

(α) Υπολογίστε την τιμή της σταθεράς c .

(β) Υπολογίστε τη μέση τιμή $E[X]$ της τ.μ. X

Λύση

(α) Αφού η $f(x)$ είναι σ.π.π. πρέπει να ισχύει ότι

$$\sum_{x=0}^{\infty} f(x) = 1$$

Όμως

$$\sum_{x=0}^{\infty} f(x) = \sum_{x=0}^{\infty} c\left(\frac{1}{3}\right)^x = c \sum_{x=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^x = c \frac{1^0}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3c}{2}$$

Άρα:

$$\frac{3c}{2} = 1 \Rightarrow c = \frac{2}{3}$$

(β) Έχουμε ότι:

$$E[X] = \sum_{x=0}^{\infty} f(x)x = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^x x = \frac{2}{3} \sum_{x=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^x x = \frac{2}{3} \frac{\frac{1}{3}}{(1 - \frac{1}{3})^2} = \frac{1}{2}$$

Άσκηση 7.

Κάθε φορά που τιθεται σε λειτουργία ένας αυτόματος πωλητής δίνει στην έξοδο μία μπάλα η οποία μπορεί να είναι κόκκινη, μαύρη ή πράσινη (θεωρείστε ότι υπάρχουν άπειρες μπάλες κάθε χρώματος). Έστω ότι θέτουμε σε λειτουργία τον αυτόματο πωλητή τρεις φορές και κάθε φορά καταγράφουμε το χρώμα της μπάλας στην έξοδο. Ορίζουμε τις τ.μ. $X = \#$ κόκκινες μπάλες στην έξοδο του πωλητή και $Y = \#$ μπάλες άλλου χρώματος εκτός κόκκινες στην έξοδο του πωλητή.

(α) Καθορίστε τις τιμές των X και Y και προδιορίστε τις τιμές του αθροίσματος $X+Y$

(β) Υπολογίστε τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας και τη μέση τιμή της τ.μ. X .

Λύση

(α) Η τυχαία μεταβλητή X μπορεί να πάρει τις τιμές 0,1,2,3. Η τυχαία μεταβλητή Y επίσης μπορεί να πάρει τις τιμές 0,1,2,3.. Η τ.μ. $X+Y$ δηλώνει το άθροισμα μετά από τρεις φορές των μπαλών με κόκκινο χρώμα και εκείνων με όχι κόκκινο χρώμα. Πρακτικά δηλαδή, δηλώνει τον αριθμό όλων των μπαλών μετά από τρεις χρήσεις του πωλητή. Επομένως η μοναδική τιμή της είναι το 3.

(β) Πρέπει να υπολογίσουμε τα $P(X=0)$, $P(X=1)$, $P(X=2)$ και $P(X=3)$.

Αρχικά το πλήθος των πιθανών ενδεχομένων είναι $3^3 = 27$ αφού σε κάθε χρήση του πωλητή έχουμε τρία πιθανά αποτελέσματα (κόκκινη, μαύρη, πράσινη).

Το πλήθος των ενδεχομένων στα οποία δεν έχουμε καμία εμφάνιση κόκκινης μπάλας είναι $2^3 = 8$, αφού σε κάθε χρήση του πωλητή έχουμε δύο πιθανά αποτελέσματα (μαύρη, πράσινη). Άρα η πιθανότητα να μην εμφανιστεί κόκκινη μπάλα είναι $\frac{8}{27}$. Δηλαδή $P(X=0) = \frac{8}{27}$

Το πλήθος των πιθανών ενδεχομένων εμφάνισης μίας κόκκινης μπάλας και δύο μη κόκκινων υπολογίζεται ως εξής. Επιλέγουμε αρχικά σε ποια θέση θα είναι η κόκκινη μπάλα, προφανώς έχουμε 3 επιλογές. Για την θέση αυτή έχουμε μία επιλογή χρώματος ενώ για τις άλλες δύο έχουμε δύο επιλογές (μαύρο, πράσινο). Άρα συνολικά έχουμε $3 \cdot 1 \cdot 2^2 = 12$. Άρα η πιθανότητα να εμφανιστεί μία κόκκινη μπάλα είναι $\frac{12}{27}$. Δηλαδή, $P(X=1) = \frac{12}{27}$.

Το πλήθος των πιθανών ενδεχομένων εμφάνισης δύο κόκκινων μπαλών και μίας μη κόκκινης υπολογίζεται ως εξής. Επιλέγουμε αρχικά σε ποιες θέσεις θα είναι οι κόκκινες μπάλες, έχουμε $\binom{3}{2} = 3$ επιλογές. Για τις θέσεις αυτές έχουμε μία επιλογή χρώματος ενώ για την άλλη έχουμε δύο επιλογές (μαύρο, πράσινο). Άρα συνολικά έχουμε $3 \cdot 1^2 \cdot 2 = 6$. Άρα η πιθανότητα να εμφανιστεί μία κόκκινη μπάλα είναι $\frac{6}{27}$. Δηλαδή, $P(X = 2) = \frac{6}{27}$.

Τέλος υπάρχει μοναδικός τρόπος να έχουμε τρεις κόκκινες μπάλες άρα $P(X = 3) = \frac{1}{27}$

Εύκολα, προκύπτει, τότε, ότι η ζητούμενη Συνάρτηση Πιθανότητας θα έχει την ακόλουθη μορφή:

$$p_X(x) = \begin{cases} 8/27, & x = 0 \\ 12/27, & x = 1 \\ 6/27, & x = 2 \\ 1/27, & x = 3. \end{cases}$$

Η μέση τιμή υπολογίζεται ως

$$E[X] = 0 \cdot \frac{8}{27} + 1 \cdot \frac{12}{27} + 2 \cdot \frac{6}{27} + 3 \cdot \frac{1}{27} = 1$$

Άσκηση 8. (Προγραμματιστική)

Βρίσκειστε σε ένα γκρουπ εξερεύνησης ($2n$ ατόμων) ενός νέου πλανήτη. Δυστυχώς με το που προσγειώνεστε στην επιφάνεια του, οι κάτοικοι εκεί σας συλλαμβάνουν και σας κλείνουν στην φυλακή. Αποφασίζουν όμως να σας βάλουν μία δοκιμασία και εάν κερδίσετε θα σας αφήσουν ελεύθερους. Αρχικά αναθέτουν σε καθένα από εσάς ένα (και διαφορετικό από τους υπόλοιπους) νούμερο από το 1 ως το $2n$. Η φυλακή περιέχει ένα δωμάτιο, μέσα στο οποίο υπάρχουν $2n$ κουτιά, καθένα από τα οποία έχει ζωγραφισμένο πάνω του ένα νούμερο (διαφορετικό από τα υπόλοιπα) από το 1 ως το $2n$. Οι φύλακες τοποθετούν τυχαία $2n$ αριθμημένες κάρτες μέσα στα κουτιά. Καθένας από εσάς μπαίνει με την σειρά στο δωμάτιο και πρέπει να βρει την κάρτα που αντιστοιχεί στο δικό του νούμερο, ανοίγοντας το πολύ n κουτιά. Στην συνέχεια οι κάρτες επανατοποθετούνται (με τον ίδιο τρόπο) στα κουτιά και ο επόμενος μπαίνει στο δωμάτιο. Εάν όλοι σας βρείτε το νούμερο σας, τα καταφέρατε, είστε ελεύθεροι! Δυστυχώς καθόλη την διάρκεια της δοκιμασίας δεν επιτρέπεται να έχετε καμία επικοινωνία μεταξύ σας. Ωστόσο, καθώς είστε πολύ έξυπνοι και γνωρίζετε πολύ καλά πιθανότητες, πριν ξεκινήσετε αποφασίζετε να ακολουθήσετε την παρακάτω στρατηγική:

Στρατηγική: Όποιος μπαίνει στο δωμάτιο επιλέγει αρχικά το κουτί που φέρει τον δικό του αριθμό πάνω. Στην συνέχεια, το δεύτερο κουτί που ανοίγει είναι εκείνο με τον αριθμό της κάρτας του πρώτου κουτιού κ.ο.κ., μέχρις ότου ανοίξει n κουτιά ή βρει το νούμερό του. Δηλαδή, εάν ο φυλακισμένος νούμερο 5 μπει στο δωμάτιο, ανοίγει το κουτί 5, κοιτάει την κάρτα μέσα του, η οποία πχ έχει το νούμερο 12, στην συνέχεια θα ανοίξει το κουτί 12, θα κοιτάξει την κάρτα μέσα του κ.ο.κ..

(α) Γράψτε μία συνάρτηση *single_prisoner*, η οποία θα υπολογίζει πειραματικά την πιθανότητα ένας από εσάς να επιτύχει στην δοκιμασία.

Αυτό θα γίνεται ως εξής: Θα επιλέξετε έναν 'μεγάλο' αριθμό $nreps$ και τόσες φορές θα τρέξετε την διαδικασία που περιγράφηκε, δηλαδή θα τοποθετείτε τυχαία τις κάρτες στα κουτιά και ένας φυλακισμένος θα ακολουθεί την στρατηγική μέχρι να βρει την κάρτα του ή να ανοίξει n κουτιά. Εάν βρει την κάρτα του, έχουμε επιτυχία, αλλιώς αποτυχία. Η πιθανότητα νίκης θα υπολογιστεί ως οι φορές που νίκησε διά το $nreps$. Η συνάρτηση παίρνει ως ορίσματα τα n, k (αριθμός του φυλακισμένου που μελετάμε) και $nreps$. Δοκιμάστε για διάφορες τιμές και γράψτε την εκτίμηση σας για την ζητούμενη πιθανότητα.

(β) Γράψτε μία συνάρτηση *all_prisoners*, η οποία θα υπολογίζει πειραματικά την πιθανότητα να σας αφήσουν ελεύθερους, δηλαδή να επιτύχετε όλοι στην δοκιμασία. Η συνάρτηση θα παίρνει τα ίδια ορίσματα με την προηγούμενη, εκτός προφανώς το k , και θα λειτουργεί παρόμοια. Προσέξτε μόνο ότι για κάθε τιμή που παίρνει το n_{traps} (δηλαδή σε κάθε πείραμα) όλοι οι φυλακισμένοι 'έξετάζονται' με την ίδια τοποθέτηση των καρτών στα κουτιά. Προφανώς επιτυχία θεωρείται να βρουν όλοι την κάρτα τους και αποτυχία να μην την βρει τουλάχιστον ένας. Δοκιμάστε για διάφορες τιμές και γράψτε την εκτίμηση σας για την ζητούμενη πιθανότητα.

(γ) *BONUS*

Υποθέτουμε τώρα ότι τελικά δεν γνωρίζετε πολύ καλά μαθηματικά οπότε δεν ακολουθείτε κάποια στρατηγική. Δηλαδή καθένας σας μπαίνει στο δωμάτιο και επιλέγει n τυχαία κουτιά και τα ανοίγει, ελπίζοντας ένα από αυτά να έχει την κάρτα του. Υπολογίστε θεωρητικά την πιθανότητα που έχει ένας από εσάς να επιτύχει. Υπολογίστε την πιθανότητα να σας αφήσουν ελεύθερους. Τι παρατηρείτε;

Λύση

(α) Ο παρακάτω κώδικας είναι σε *Python*. Σίγουρα δεν είναι βέλτιστος, αλλά γράφτηκε ώστε να είναι ξεκάθαρη η διαδικασία που ακολουθείται.

(γ) *BONUS*

Οι πιθανοί τρόποι επιλογής n κουτιών από τα $2n$ είναι $\binom{2n}{n} = \frac{2n!}{n!n!}$. Οι τρόποι να συμπεριλαμβάνεται το κουτί με το σωστό νούμερο στα n αυτά κουτιά είναι $\binom{2n-1}{n-1} = \frac{(2n-1)!}{(n-1)!n!}$ (αφού επιλέγουμε το σωστό κουτί και άλλα $n-1$ από τα υπόλοιπα). Άρα η πιθανότητα επιτυχίας είναι

$$\frac{\frac{(2n-1)!}{(n-1)!n!}}{\frac{2n!}{n!n!}} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

Η πιθανότητα να επιτύχουν όλοι με αυτόν τον τρόπο είναι $(\frac{1}{2})^{2n}$, το οποίο τείνει στο μηδέν όσο μεγαλώνει το n . Παρατηρούμε ότι η πρώτη στρατηγική ήταν πολύ καλύτερη, αφού η πιθανότητα επιτυχίας είναι σταθερά 30%, ανεξάρτητα του αριθμού των φυλακισμένων.

```
8 import numpy as np
9
10 def single_prisoner(n,k,nreps):
11     success = 0
12     for i in range(nreps):
13         cards = np.random.permutation(2*n)
14
15         tries = 0
16         which_box = k
17         while tries<n:
18             if cards[which_box] == k:
19                 success+=1
20                 break
21             else:
22                 which_box = cards[which_box]
23                 tries+=1
24     return success/nreps
25
26
27 print(single_prisoner(1000,4,1000))
28
29 """
30 Our estimation for the probability that one prisoner is successful is 0.5
31 """
32
33
34 def all_prisoners(n,nreps):
35     success = 0
36     for i in range(nreps):
37         cards = np.random.permutation(2*n)
38
39         successful_players = 0
40         for k in range (2*n):
41             tries = 0
42             which_box = k
43             successful_player = 0
44             while tries<n:
45
46                 if cards[which_box] == k:
47                     successful_players += 1
48                     successful_player = 1
49                     break
50                 else:
51                     which_box = cards[which_box]
52                     tries+=1
53
54             if successful_player == 0 : #if one prisoner fails, the team fails no need to continue
55                 break
56             if successful_players == 2*n:
57                 success+=1
58     return success/nreps
59
60
61 print(all_prisoners(100,100000))
62
63 """
64 Our estimation for the probability that one prisoner is successful is 0.3
65 """
```