

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

HY-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2022-2023
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Τρίτη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 1/11/2022

Ημερομηνία Παράδοσης: 14/11/2022

ΣΗΜΑΝΤΙΚΕΣ ΟΔΗΓΙΕΣ

- Η παράδοση των ασκήσεών σας θα γίνεται ηλεκτρονικά, **ΑΠΟΚΛΕΙΣΤΙΚΑ** μέσω της σελίδας e-learn του μαθήματος, εδώ. Παραδόσεις με e-mail, ή οποιονδήποτε άλλον τρόπο δε θα γίνονται δεκτές και θα **μηδενίζονται**.
- Για την παράδοση, θα πρέπει να σκανάρετε ή να φωτογραφίσετε τις κόλλες των ασκήσεών σας και στη συνέχεια να φτιάξετε ένα PDF που θα περιλαμβάνει αυτές τις φωτογραφίες, δηλαδή το σύνολο της λυμένης σειράς ασκήσεων.
- Αριθμήστε τις σελίδες των ασκήσεών σας (από την άσκηση 1, στην άσκηση 2, στην άσκηση 3 κ.ο.κ.) και **ΣΙΓΟΥΡΕΥΤΕΙΤΕ** ότι τα σκαναρίσματα που έχετε κάνει έχουν δημιουργήσει εικόνες στις οποίες είναι **ΕΥΔΙΑΚΡΙΤΕΣ** και **ΕΥΚΟΛΟΔΙΑΒΑΣΤΕΣ** οι λύσεις σας. Θολές, και γενικότερα θορυβώδεις, εικόνες ενδέχεται να καταστήσουν αδύνατη τη διαδικασία της διόρθωσης και κατ' επέκταση να οδηγήσουν σε μηδενισμό των ασκήσεών σας.

Άσκηση 1.

- (α) Υποθέστε ότι δεν επιτρέπονται οι επαναλήψεις. Πόσοι τετραψήφιοι αριθμοί είναι δυνατόν να σχηματιστούν από τα ψηφία 1, 2, 3, 5, 7, 8;
- (β) Πόσοι από αυτούς είναι μικρότεροι από 4000;
- (γ) Πόσοι από αυτούς είναι άρτιοι;
- (δ) Πόσοι από αυτούς είναι περιττοί;
- (ε) Πόσοι από αυτούς είναι πολλαπλάσια του 5;
- (στ) Πόσοι από αυτούς περιέχουν και το ψηφίο 3 και το ψηφίο 5;

Άσκηση 2.

Μια αντιπροσωπεία τεσσάρων φοιτητών πρέπει να επιλεγεί από ένα σύνολο 12 φοιτητών, για να παρακολουθήσει ένα συμβούλιο.

- (α) Με πόσους τρόπους μπορεί να επιλεγεί η αντιπροσωπεία;
- (β) Επαναλάβετε το α ερώτημα, εάν υπάρχουν δύο φοιτητές που αρνούνται να είναι μαζί.
- (γ) Επαναλάβετε το α ερώτημα, εάν υπάρχουν δύο φοιτητές που θα παρακολουθήσουν το συμβούλιο μόνο εάν είναι στην αντιπροσωπεία μαζί.

- (δ) Επαναλάβετε το α ερώτημα, εάν υπάρχουν δύο φοιτητές που αρνούνται να είναι στην αντιπροσωπεία μαζί και δύο άλλοι φοιτητές που θα παρακολουθήσουν το συμβούλιο μόνο εάν είναι μαζί.

Άσκηση 3.

- (α) Με πόσους τρόπους είναι δυνατόν να επιλεγούν δύο τετράγωνα από μια 8×8 σκακιέρα, έτσι ώστε να μην βρίσκονται ούτε στην ίδια γραμμή ούτε στην ίδια στήλη;
- (β) Με πόσους τρόπους είναι δυνατόν να επιλεγούν τέσσερα τετράγωνα από μια 8×8 σκακιέρα, έτσι ώστε να σχηματίζουν ένα (ορθογώνιο) παραλληλόγραμμο;

Άσκηση 4.

Μια φοιτήτρια πρέπει να απαντήσει σε **τουλάχιστον** 8 από τις 10 ερωτήσεις ενός διαγωνίσματος.

- (α) Πόσες επιλογές έχει η φοιτήτρια;
- (β) Πόσες επιλογές έχει, αν πρέπει να απαντήσει στις τρεις πρώτες ερωτήσεις;
- (γ) Πόσες επιλογές έχει, εαν πρέπει να απαντήσει σε τουλάχιστον τέσσερις από τις πέντε πρώτες ερωτήσεις;

Άσκηση 5.

- (α) Δείξτε ότι ο συνολικός αριθμός των μεταθέσεων που περιλαμβάνουν p κόκκινες μπάλες με 0 ή 1 ή 2, ..., ή q άσπρες μπάλες είναι

$$\frac{p!}{p!} + \frac{(p+1)!}{p!1!} + \frac{(p+2)!}{p!2!} + \dots + \frac{(p+q)!}{p!q!}$$

- (β) Δείξτε ότι το άθροισμα στο τμήμα (α) είναι ίσο με

$$\frac{(p+q+1)!}{(p+1)!q!}$$

Άσκηση 6.

Η σ.π.π. της τ.μ. X δίνεται από την σχέση: $f(x) = c(\frac{1}{3})^x$, για $x = 0, 1, \dots$, όπου c θετική σταθερά.

- (α) Υπολογίστε την τιμή της σταθεράς c .
- (β) Υπολογίστε τη μέση τιμή $E[X]$ της τ.μ. X

Υπόδειξη: Δίνεται ότι $\sum_{n=k}^{\infty} r^n = \frac{r^k}{(1-r)}$, $k = 0, 1, \dots$, $|r| < 1$ και $\sum_{n=1}^{\infty} nr^n = \frac{r}{(1-r)^2}$

Άσκηση 7.

Κάθε φορά που τιθεται σε λειτουργία ένας αυτόματος πωλητής δίνει στην έξοδο μία μπάλα η οποία μπορεί να είναι κόκκινη, μαύρη ή πράσινη (θεωρείστε ότι υπάρχουν άπειρες μπάλες κάθε χρώματος). Έστω ότι θέτουμε σε λειτουργία τον αυτόματο πωλητή τρεις φορές και κάθε φορά καταγράφουμε το χρώμα της μπάλας στην έξοδο. Ορίζουμε τις τ.μ. $X = \#$ κόκκινες μπάλες στην έξοδο του πωλητή και $Y = \#$ μπάλες άλλου χρώματος εκτός κόκκινες στην έξοδο του πωλητή.

- (α) Καθορίστε τις τιμές των X και Y και προσδιορίστε τις τιμές του αθροίσματος $X+Y$
- (β) Υπολογίστε τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας και τη μέση τιμή της τ.μ. X .

Άσκηση 8. (Προγραμματιστική)

Βρίσχεστε σε ένα γκρουπ εξερεύνησης ($2n$ ατόμων) ενός νέου πλανήτη. Δυστυχώς με το που προσγειώνεστε στην επιφάνεια του, οι κάτοικοι εκεί σας συλλαμβάνουν και σας κλείνουν στην φυλακή. Αποφασίζουν όμως να σας βάλουν μία δοκιμασία και εάν κερδίσετε θα σας αφήσουν ελεύθερους. Αρχικά αναθέτουν σε καθένα από εσάς ένα (και διαφορετικό από τους υπόλοιπους) νούμερο από το 1 ως το $2n$. Η φυλακή περιέχει ένα δωμάτιο, μέσα στο οποίο υπάρχουν $2n$ κουτιά, καθένα από τα οποία έχει ζωγραφισμένο πάνω του ένα νούμερο (διαφορετικό από τα υπόλοιπα) από το 1 ως το $2n$. Οι φύλακες τοποθετούν τυχαία $2n$ αριθμημένες κάρτες μέσα στα κουτιά. Καθένας από εσάς μπαίνει με την σειρά στο δωμάτιο και πρέπει να βρει την κάρτα που αντιστοιχεί στο δικό του νούμερο, ανοίγοντας το πολύ n κουτιά. Στην συνέχεια οι κάρτες επανατοποθετούνται (με τον ίδιο τρόπο) στα κουτιά και ο επόμενος μπαίνει στο δωμάτιο. Εάν όλοι σας βρείτε το νούμερο σας, τα καταφέρατε, είστε ελεύθεροι! Δυστυχώς καθόλη την διάρκεια της δοκιμασίας δεν επιτρέπεται να έχετε καμία επικοινωνία μεταξύ σας. Ωστόσο, καθώς είστε πολύ έξυπνοι και γνωρίζετε πολύ καλά πιθανότητες, πριν ξεκινήσετε αποφασίζετε να ακολουθήσετε την παρακάτω στρατηγική:

Στρατηγική: Όποιος μπαίνει στο δωμάτιο επιλέγει αρχικά το κουτί που φέρει τον δικό του αριθμό πάνω. Στην συνέχεια, το δεύτερο κουτί που ανοίγει είναι εκείνο με τον αριθμό της κάρτας του πρώτου κουτιού κ.ο.κ., μέχρις ότου ανοίξει n κουτιά ή βρει το νουμερό του. Δηλαδή, εάν ο φυλακισμένος νούμερο 5 μπει στο δωμάτιο, ανοίγει το κουτί 5, κοιτάει την κάρτα μέσα του, η οποία πχ έχει το νούμερο 12, στην συνέχεια θα ανοίξει το κουτί 12, θα κοιτάξει την κάρτα μέσα του κ.ο.κ..

- (α) Γράψτε μία συνάρτηση *single_prisoner*, η οποία θα υπολογίζει πειραματικά την πιθανότητα ένας από εσάς να επιτύχει στην δοκιμασία.

Αυτό θα γίνεται ως εξής: Θα επιλέξετε έναν «μεγάλο» αριθμό *nreps* και τόσες φορές θα τρέξετε την διαδικασία που περιγράφηκε, δηλαδή θα τοποθετείτε τυχαία τις κάρτες στα κουτιά και ένας φυλακισμένος θα ακολουθεί την στρατηγική μέχρι να βρει την κάρτα του ή να ανοίξει n κουτιά. Εάν βρει την κάρτα του, έχουμε επιτυχία, αλλιώς αποτυχία. Η πιθανότητα νίκης θα υπολογιστεί ως οι φορές που νίκησε διά το *nreps*. Η συνάρτηση παίρνει ως ορίσματα τα n, k (αριθμός του φυλακισμένου που μελετάμε) και *nreps*. Δοκιμάστε για διάφορες τιμές και γράψτε την εκτίμηση σας για την ζητούμενη πιθανότητα.

- (β) Γράψτε μία συνάρτηση *all_prisoners*, η οποία θα υπολογίζει πειραματικά την πιθανότητα να σας αφήσουν ελεύθερους, δηλαδή να επιτύχετε όλοι στην δοκιμασία. Η συνάρτηση θα παίρνει τα ίδια ορίσματα με την προηγούμενη, εκτός προφανώς το k , και θα λειτουργεί παρόμοια. Προσέξτε μόνο ότι για κάθε τιμή που παίρνει το *nreps* (δηλαδή σε κάθε πείραμα) όλοι οι φυλακισμένοι «εξετάζονται» με την ίδια τοποθέτηση των καρτών στα κουτιά. Προφανώς επιτυχία θεωρείται να βρουν όλοι την κάρτα τους και αποτυχία να μην την βρει τουλάχιστον ένας. Δοκιμάστε για διάφορες τιμές και γράψτε την εκτίμηση σας για την ζητούμενη πιθανότητα.

(γ) BONUS

Υποθέτουμε τώρα ότι τελικά δεν γνωρίζετε πολύ καλά μαθηματικά οπότε δεν ακολουθείτε κάποια στρατηγική. Δηλαδή καθέννας σας μπαίνει στο δωμάτιο και επιλέγει n τυχαία κουτιά και τα ανοίγει, ελπίζοντας ένα από αυτά να έχει την κάρτα του. Υπολογίστε θεωρητικά την πιθανότητα που έχει ένας από εσάς να επιτύχει. Υπολογίστε την πιθανότητα να σας αφήσουν ελεύθερους. Τι παρατηρείτε;

Δουλέψτε σε ό,τι γλώσσα σας βολεύει. Χειριστείτε την άσκηση με όποιον τρόπο θέλετε (μπορείτε να μην ακολουθήσετε αυτόν που περιγράφει η εκφώνηση) αρκεί τελικά να υπολογίσετε σωστά τα ζητούμενα. Γραψτε στο χαρτί τις απαντήσεις σας και τα σχόλια σας (εάν έχετε). Δεν χρειάζεται να υπάρχει χειρόγραφο ο κώδικας, αρκεί να παραδώσετε το αρχείο του μαζί με το *pdf* των απαντήσεών σας