

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2022-2023
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Δεύτερη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 19/10/2022

Ημερομηνία Παράδοσης: 31/10/2022

Σημείωση: Σε πολλά σημεία χρησιμοποιούμε την σημειογραφία $P(A, B)$ που σημαίνει απλώς $P(A \cap B)$. Αντίστοιχα, $P(A | B, C) = P(A | B \cap C)$ κ.ο.κ.

Άσκηση 1

Έστω τα γεγονότα A, B, C με πιθανότητες $P(A) = 0.5$, $P(B) = 0.2$, $P(C) = 0.4$.

- α') Βρείτε την $P(A \cup B)$ αν τα A, B είναι ανεξάρτητα.
- β') Βρείτε την $P(A \cup B)$ αν τα A, B είναι ασυμβίβαστα.
- γ') Δείξτε ότι αν τα A, B, C είναι από κοινού ανεξάρτητα, τότε και τα $(A \cup B), C$ είναι ανεξάρτητα.
- δ') Βρείτε την $P(A \cup B \cup C)$ αν τα A, B, C είναι από κοινού ανεξάρτητα.

Λύση

- α') Αφού είναι ανεξάρτητα, $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Άρα,
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.5 + 0.2 - 0.1 = 0.6.$$
- β') Αφού είναι ασυμβίβαστα, $P(A \cap B) = 0$ και συνεπώς $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. Άρα,
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0.7.$$
- γ') Αρκεί να δείξουμε ότι $P((A \cup B) \cap C) = P(A \cup B)P(C)$.

$$\begin{aligned} P((A \cup B) \cap C) &= P((A \cap C) \cup (B \cap C)) \\ &= P(A \cap C) + P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C) \\ &= P(A)P(C) + P(B)P(C) - P(A)P(B)P(C) \\ &= (P(A) + P(B) - P(A)P(B))P(C) \\ &= P(A \cup B)P(C) \end{aligned}$$

δ')

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P(A \cup B) + P(C) - P((A \cup B) \cap C) \\ &= P(A \cup B) + P(C) - P(A \cup B)P(C) \\ &= 0.6 + 0.4 - 0.6 \cdot 0.4 \\ &= 0.76, \end{aligned}$$

όπου την $P(A \cup B)$ την έχουμε υπολογίσει στο ερώτημα (α').

Άσκηση 2

Πριν φύγει για τη δουλειά του ο Νίκος ελέγχει το δελτίο καιρού στην τηλεόραση για να αποφασίσει αν θα πάρει μαζί του ομπρέλα ή όχι. Όταν το δελτίο λέει ότι θα βρέξει, η πιθανότητα όντως να βρέξει είναι 0.9. Από την άλλη, όταν το δελτίο λέει ότι δεν θα βρέξει, η πιθανότητα να βρέξει είναι 0.1. Κατά τη διάρκεια του χειμώνα το δελτίο λέει 'βροχή' 7 στις 10 μέρες, ενώ κατά τη διάρκεια του καλοκαιριού, το δελτίο λέει 'βροχή' 1 στις 10 μέρες.

- α') Μία μέρα που ο Νίκος δεν κοιτάζε το δελτίο, έβρεξε. Ποια είναι η πιθανότητα ότι το δελτίο είπε 'βροχή' αν ήταν μία μέρα του χειμώνα; Ποια είναι η πιθανότητα ότι το δελτίο είπε 'βροχή' αν ήταν μία μέρα του καλοκαιριού;
- β') Η πιθανότητα να μην κοιτάξει το δελτίο ο Νίκος είναι 0.2 για οποιαδήποτε ημέρα του χρόνου. Όταν χάνει το δελτίο, ο Νίκος ρίχνει ένα δίκαιο κέρμα για να αποφασίσει αν θα πάρει ομπρέλα μαζί του. Τις μέρες που βλέπει το δελτίο, παίρνει πάντα μαζί του την ομπρέλα αν το δελτίο πει 'βροχή', και δεν την παίρνει ποτέ αν το δελτίο πει 'όχι βροχή'. Είναι τα γεγονότα 'ο Νίκος παίρνει την ομπρέλα' και 'το δελτίο λέει όχι βροχή' ανεξάρτητα μεταξύ τους; Εξαρτάται η απάντηση από την εποχή;
- γ') Ο Νίκος κρατά την ομπρέλα του και βρέχει. Δεδομένου ότι ισχύουν οι συνθήκες στο (β'), ποια είναι η πιθανότητα ότι ο Νίκος είδε το δελτίο αν είναι καλοκαίρι και ποια αν είναι χειμώνας;

Λύση

- α') Έστω R το γεγονός ότι υπήρξε πρόβλεψη για βροχή. Έστω B το γεγονός ότι έβρεξε. Επίσης, έστω X το γεγονός ότι είναι χειμώνας και K ότι είναι καλοκαίρι. Έστω p η πιθανότητα ότι η πρόβλεψη είναι για βροχή.

Αν έχουμε χειμώνα τότε:

$$\begin{aligned} P(R | B, X) &= \frac{P(B | R, X) \cdot P(R|X)}{P(B|X)} \\ &= \frac{P(B | R, X) \cdot P(R|X)}{P(B, R|X) + P(B, R^c|X)} \\ &= \frac{P(B | R, X) \cdot P(R|X)}{P(B|R, X)P(R|X) + P(B|R^c, X)P(R^c|X)} \\ &= \frac{0.9 \cdot 0.7}{0.9 \cdot 0.7 + 0.1 \cdot 0.3} \\ &= \frac{63}{66} . \end{aligned}$$

Αν έχουμε καλοκαίρι, τότε:

$$P(R | B, K) = \frac{P(B | R, K) \cdot P(R|K)}{P(B|R, K)P(R|K) + P(B|R^c, K)P(R^c|K)} = \frac{0.9 \cdot 0.1}{0.9 \cdot 0.1 + 0.1 \cdot 0.9} = \frac{1}{2} .$$

- β') Έστω C το γεγονός ότι ο Νίκος κρατάει ομπρέλα και D το γεγονός ότι είδε το δελτίο καιρού. Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} P(C) &= P(C|D)P(D) + P(C|D^c)P(D^c) = P(C|D) \cdot 0.8 + 0.5 \cdot 0.2 = P(C|D) \cdot 0.8 + 0.1 \\ P(C | R^c) &= 0 \cdot 0.8 + 0.5 \cdot 0.2 = 0.1 \end{aligned}$$

Επομένως, θα ισχύει $P(C) = P(C | R^c)$ αν και μόνο αν $P(C|D) = 0$. Όμως, το $P(C|D)$ μπορεί να είναι είτε 0.7 είτε 0.1. Συνεπώς, τα γεγονότα C και R^c δεν θα είναι ποτέ ανεξάρτητα, όποια και αν είναι η εποχή.

- γ') Αν είναι χειμώνας, τότε,

$$\begin{aligned} P(D|C, B, X) &= \frac{P(C|D, B, X)P(D|B, X)}{P(C|D, B, X)P(D|B, X) + P(C|D^c, B, X)P(D^c|B, X)} \\ &= \frac{P(C|D, B, X)P(D)}{P(C|D, B, X)P(D) + P(C|D^c)P(D^c)} , \end{aligned}$$

όπου στη δεύτερη ισότητα αξιοποιήσαμε τις ανεξαρτησίες για να απλοποιήσουμε τα ενδεχόμενα. Επίσης,

$$\begin{aligned}
 P(C|D, B, X) &= \frac{P(B|C, D, X)P(C|D, X)}{P(B|C, D, X)P(C|D, X) + P(B|C^c, D, X)P(C^c|D, X)} \\
 &= \frac{0.9 \cdot 0.7}{0.9 \cdot 0.7 + 0.1 \cdot 0.3} \\
 &= \frac{63}{66} \\
 &= \frac{21}{22} .
 \end{aligned}$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}
 P(D|C, B, X) &= \frac{21/22 \cdot 0.8}{21/22 \cdot 0.8 + 0.5 \cdot 0.2} \\
 &\approx 0.86 .
 \end{aligned}$$

Αντίστοιχα, αν είναι καλοκαίρι, τότε

$$P(D|C, B, K) = \frac{P(C|D, B, K)P(D)}{P(C|D, B, K)P(D) + P(C|D^c, B, K)P(D^c)} .$$

Έχουμε

$$\begin{aligned}
 P(C|D, B, K) &= \frac{P(B|C, D, K)P(C|D, K)}{P(B|C, D, K)P(C|D, K) + P(B|C^c, D, K)P(C^c|D, K)} \\
 &= \frac{0.9 \cdot 0.1}{0.9 \cdot 0.1 + 0.1 \cdot 0.9} \\
 &= 0.5 .
 \end{aligned}$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}
 P(D|C, B, X) &= \frac{0.5 \cdot 0.8}{0.5 \cdot 0.8 + 0.5 \cdot 0.2} \\
 &= 0.8 .
 \end{aligned}$$

Άσκηση 3

Ένα μπλοκ πληροφοριών μεταδίδεται επαναλαμβανόμενα μέσω ενός θορυβώδους καναλιού έως ότου ληφθεί ένα μπλοκ χωρίς σφάλματα. Έστω $M \geq 1$ ο αριθμός των μπλοκ που απαιτούνται για μια επιτυχή μετάδοση. Ορίστε τα ακόλουθα σύνολα:

- $A = \{M \text{ είναι άρτιο}\},$
- $B = \{M \text{ είναι πολλαπλάσιο του } 3\},$
- $C = \{M \text{ είναι μικρότερο ή ίσο του } 6\}.$

Υποθέστε ότι για κάθε επιπλέον μπλοκ που αποστέλεται, η πιθανότητα να μην ληφθεί σωστά πέφτει κάθε φορά στο ήμισυ. Δηλαδή:

$$P(M = k) = \left(\frac{1}{2}\right)^k, \quad k = 1, 2, \dots$$

Να προσδιορίσετε τις παρακάτω πιθανότητες

α') $P(A), P(B), P(C), P(C^c)$

β') $P(A \cap B), P(A \setminus B), P(A \cap B \cap C)$

γ') $P(A|B), P(B|A)$

δ') $P(A|B \cap C), P(A \cap B|C)$

Όπου χρειαστεί, μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την ταυτότητα ('γεωμετρική σειρά'): $\sum_{n=1}^{\infty} (z)^n = \frac{z}{1-z}, \quad |z| < 1.$

Λύση

$\alpha')$

$$\begin{aligned}P(A) &= P(M = 2 \cup M = 4 \cup M = 6 \cup \dots) \\&= -P(M = 2 \cap M = 4 \cap M = 6 \cap \dots) + P(M = 2) + P(M = 4) + P(M = 6) + \dots \\&= -0 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^6 + \dots \\&= \left(\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \dots \\&= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n \\&= \frac{1/4}{1 - 1/4} \\&= \frac{1}{3},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(B) &= P(M = 3 \cup M = 6 \cup M = 9 \cup \dots) \\&= -P(M = 3 \cap M = 6 \cap M = 9 \cap \dots) + P(M = 3) + P(M = 6) + P(M = 9) + \dots \\&= -0 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^6 + \left(\frac{1}{2}\right)^9 + \dots \\&= \left(\frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{8}\right)^2 + \left(\frac{1}{8}\right)^3 + \dots \\&= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{8}\right)^n \\&= \frac{1/8}{1 - 1/8} \\&= \frac{1}{7},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(C) &= \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \left(\frac{1}{2}\right)^6 \\&= \frac{63}{64},\end{aligned}$$

$$P(C^c) = 1 - P(C) = \frac{1}{64}.$$

$\beta')$ Παρατηρούμε ότι το γεγονός $A \cap B = \{M \text{ είναι πολλαπλάσιο του } 6\}$. Άρα,

$$\begin{aligned}P(A \cap B) &= P(M = 6 \cup M = 12 \cup M = 18 \cup \dots) \\&= \left(\frac{1}{2}\right)^6 + \left(\frac{1}{2}\right)^{12} + \left(\frac{1}{2}\right)^{18} + \dots \\&= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{64}\right)^n \\&= \frac{1/64}{1 - 1/64} \\&= \frac{1}{63}.\end{aligned}$$

Έπειτα, παρατηρούμε ότι το γεγονός A μπορεί διαμεριστεί πλήρως ως εξής: $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$. Επομένως,

$$\begin{aligned} P(A \setminus B) &= P(A) - P(A \cap B) \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{63} \\ &= \frac{20}{63}. \end{aligned}$$

Επίσης,

$$P(A \cap B \cap C) = P(M = 6) = \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64}.$$

γ')

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/63}{1/7} = \frac{7}{63},$$

$$P(B | A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1/63}{1/3} = \frac{1}{21}.$$

δ')

$$P(A | B \cap C) = \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(B \cap C)} = \frac{1/64}{(1/2)^3 + (1/2)^6} = \frac{1}{9},$$

$$P(A \cap B | C) = \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(C)} = \frac{1/64}{64/63} = \frac{1}{63}.$$

Άσκηση 4

Ένας παρατηρητής πουλιών ενδιαφέρεται ιδιαίτερα για την παρατήρηση των νανόμπουφων, ενός είδους μπούφου. Έχει παρατηρήσει ότι κάθε μήνα καταγράφει από έναν έως πέντε νανόμπουφους, με ίση πιθανότητα, και ανεξάρτητα από μήνα σε μήνα. Θέλει να βγάλει στατιστικά συμπεράσματα για τις καταγραφές του σε δύο συνεχόμενους μήνες.

Έστω A το γεγονός ότι κατέγραψε συνολικά 10 νανόμπουφους σε δύο συνεχόμενους μήνες. Έστω B το γεγονός ότι κατέγραψε περισσότερους από 5 νανόμπουφους τους δύο μήνες.

α') Είναι τα A και B ανεξάρτητα;

β') Έστω C το γεγονός ότι κατέγραψε ακριβώς 5 νανόμπουφους τον πρώτο μήνα. Είναι τα A και B υπό συνθήκη ανεξάρτητα δεδομένου του C ;

γ') Είναι τα A και C ανεξάρτητα; Είναι τα B και C ανεξάρτητα;

δ') Δεδομένου ότι κατέγραψε 6 νανόμπουφους στους δύο μήνες, ποια είναι η πιθανότητα ότι κατέγραψε ακριβώς 2 νανόμπουφους τον πρώτο μήνα; Ποια είναι η πιθανότητα ότι κατέγραψε ακριβώς 3 νανόμπουφους τον πρώτο μήνα;

ε') Δεδομένου ότι κατέγραψε 6 νανόμπουφους στους δύο μήνες, ποια είναι η πιθανότητα ότι κατέγραψε ακριβώς 2 νανόμπουφους σε τουλάχιστον έναν από τους δύο μήνες; Ποια είναι η πιθανότητα ότι κατέγραψε ακριβώς 3 νανόμπουφους σε τουλάχιστον έναν από τους δύο μήνες;

Λύση

α') Παρατηρούμε ότι $A \subset B$ και επομένως $P(A \cap B) = P(A)$. Η τελευταία έκφραση είναι ίση με το $P(A) \cdot P(B)$ μόνο όταν $P(B) = 1$ ή $P(A) = 0$. Όμως, στο παράδειγμά μας είναι καθαρά $P(B) < 1$ και $P(A) > 0$. Συνεπώς, $P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$ και άρα τα γεγονότα A και B δεν είναι ανεξάρτητα.

β') Δεδομένου του γεγονότος C , το γεγονός A θα συμβεί αν και μόνο αν παρατηρήσει ακριβώς 5 νανόμπουφους τον δεύτερο μήνα. Επομένως, είναι: $P(A | C) = 1/5$.

Επίσης, εφόσον παρατήρησε 5 νανόμπουφους τον πρώτο μήνα, είναι σίγουρο ότι θα παρατηρήσει περισσότερους από 5 νανόμπουφους συνολικά. Οπότε, θα είναι: $P(B | C) = 1$.

Αν το A συμβεί, τότε συμβαίνει και το B , επομένως θα ισχύει ότι: $P(A \cap B | C) = P(A | C) = P(A | C) \cdot P(B | C)$. Συνεπώς, τα γεγονότα A και B είναι υπό συνθήκη ανεξάρτητα δεδομένου του γεγονότος C .

γ') Παραπάνω βρήκαμε ότι $P(A | C) = 1/5$. Όμως η μη-δεσμευμένη πιθανότητα είναι $P(A) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{25}$. Επομένως, $P(A | C) \neq P(A)$ και συνεπώς τα γεγονότα A και C δεν είναι ανεξάρτητα.

Επίσης, $P(B | C) = 1$ ενώ είναι προφανές ότι $P(B) < 1$. Άρα, τα γεγονότα B και C δεν είναι ούτε αυτά ανεξάρτητα.

δ') Έστω F_i , όπου $(i = 1, 2, \dots, 5)$, το γεγονός ότι τον πρώτο μήνα κατέγραψε i νανόμπουφους. Παρομοίως, έστω S_i το γεγονός ότι τον δεύτερο μήνα κατέγραψε i νανόμπουφους. Έστω T_j , όπου $(j = 2, \dots, 10)$, το γεγονός ότι ο συνολικός αριθμός καταγραφών και τους 2 μήνες είναι j . Τότε, θα έχουμε:

$$\begin{aligned} P(F_2 | T_6) &= \frac{P(T_6 | F_2) \cdot P(F_2)}{P(T_6)} \\ &= \frac{P(S_4) \cdot P(F_2)}{\sum_{i=1}^5 P(F_i \cap S_{6-i})} \\ &= \frac{P(S_4) \cdot P(F_2)}{\sum_{i=1}^5 P(F_i)P(S_{6-i})} \\ &= \frac{\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5}}{5 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5}} \\ &= \frac{1}{5}, \end{aligned}$$

όπου η πρώτη ισότητα χρησιμοποιεί τον κανόνα του Bayes, η δεύτερη ισότητα χρησιμοποιεί το Ολικό Θεώρημα Πιθανοτήτων, και η τρίτη ισότητα χρησιμοποιεί το γεγονός ότι ο αριθμός των παρατηρήσεων που γίνονται ανά μήνα είναι ανεξάρτητος.

Παρομοίως, προκύπτει ότι: $P(F_3 | T_6) = 1/5$.

ε') Παραπάνω βρήκαμε ότι $P(F_2 | T_6) = 1/5$. Εφόσον οι μήνες είναι κατανημεμένοι το ίδιο, θα ισχύει και το: $P(S_2 | T_6) = 1/5$. Υπολογίζουμε την ζητούμενη πιθανότητα ως εξής:

$$\begin{aligned} P(F_2 \cup S_2 | T_6) &= P(F_2 | T_6) + P(S_2 | T_6) - P(F_2 \cap S_2 | T_6) \\ &= \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - 0 \\ &= \frac{2}{5}. \end{aligned}$$

Με τον ίδιο τρόπο θα έχουμε:

$$\begin{aligned} P(F_3 \cup S_3 | T_6) &= P(F_3 | T_6) + P(S_3 | T_6) - P(F_3 \cap S_3 | T_6) \\ &= \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - P(S_3 | F_3 \cap T_6) \cdot P(F_3 | T_6) \\ &= \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - 1 \cdot \frac{1}{5} \\ &= \frac{1}{5}. \end{aligned}$$

Σημειώστε ότι το τελευταίο αποτέλεσμα είναι λογικό, αφού υπάρχει μόνο ένας τρόπος να παρατηρήσεις ακριβώς 3 νανόμπουφους σε έναν μήνα με δεδομένο ότι παρατηρήσεις συνολικά 6 (το ενδεχόμενο $\{F_3, S_3\}$), ενώ υπάρχουν 2 τρόποι να παρατηρήσεις ακριβώς 2 νανόμπουφους σε έναν μήνα με δεδομένο ότι παρατηρήσεις συνολικά 6 (τα ενδεχόμενα $\{F_2, S_4\}$ και $\{F_4, S_2\}$).