

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2022-2023
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Δεύτερη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 19/10/2022

Ημερομηνία Παράδοσης: 31/10/2022

ΣΗΜΑΝΤΙΚΕΣ ΟΔΗΓΙΕΣ

- Η παράδοση των ασκήσεών σας θα γίνεται ηλεκτρονικά, **ΑΠΟΚΛΕΙΣΤΙΚΑ** μέσω της σελίδας e-learn του μαθήματος, **εδώ**. Παραδόσεις με e-mail, ή οποιονδήποτε άλλον τρόπο δε θα γίνονται δεκτές και θα **μηδενίζονται**.
- Για την παράδοση, θα πρέπει να σκανάρετε ή να φωτογραφίσετε τις κόλλες των ασκήσεών σας και στη συνέχεια να φτιάξετε ένα PDF που θα περιλαμβάνει αυτές τις φωτογραφίες, δηλαδή το σύνολο της λυμένης σειράς ασκήσεων.
- Αριθμήστε τις σελίδες των ασκήσεών σας (από την άσκηση 1, στην άσκηση 2, στην άσκηση 3 κ.ο.κ.) και **ΣΙΓΟΥΡΕΥΤΕΙΤΕ** ότι τα σκαναρίσματα που έχετε κάνει έχουν δημιουργήσει εικόνες στις οποίες είναι **ΕΥΔΙΑΚΡΙΤΕΣ** και **ΕΥΚΟΛΟΔΙΑΒΑΣΤΕΣ** οι λύσεις σας. Θολές, και γενικότερα θορυβώδεις, εικόνες ενδέχεται να καταστήσουν αδύνατη τη διαδικασία της διόρθωσης και κατ' επέκταση να οδηγήσουν σε μηδενισμό των ασκήσεών σας.

Άσκηση 1

Έστω τα γεγονότα A, B, C με πιθανότητες $P(A) = 0.5$, $P(B) = 0.2$, $P(C) = 0.4$.

- α') Βρείτε την $P(A \cup B)$ αν τα A, B είναι ανεξάρτητα.
- β') Βρείτε την $P(A \cup B)$ αν τα A, B είναι ασυμβίβαστα.
- γ') Δείξτε ότι αν τα A, B, C είναι από κοινού ανεξάρτητα, τότε και τα $(A \cup B), C$ είναι ανεξάρτητα.
- δ') Βρείτε την $P(A \cup B \cup C)$ αν τα A, B, C είναι από κοινού ανεξάρτητα.

Άσκηση 2

Πριν φύγει για τη δουλειά του ο Νίκος ελέγχει το δελτίο καιρού στην τηλεόραση για να αποφασίσει αν θα πάρει μαζί του ομπρέλα ή όχι. Όταν το δελτίο λέει ότι θα βρέξει, η πιθανότητα όντως να βρέξει είναι 0.9. Από την άλλη, όταν το δελτίο λέει ότι δεν θα βρέξει, η πιθανότητα να βρέξει είναι 0.1. Κατά τη διάρκεια του χειμώνα το δελτίο λέει 'βροχή' 7 στις 10 μέρες, ενώ κατά τη διάρκεια του καλοκαιριού, το δελτίο λέει 'βροχή' 1 στις 10 μέρες.

- α') Μία μέρα που ο Νίκος δεν κοίταζε το δελτίο, έβρεξε. Ποια είναι η πιθανότητα ότι το δελτίο είπε 'βροχή' αν ήταν μία μέρα του χειμώνα; Ποια είναι η πιθανότητα ότι το δελτίο είπε 'βροχή' αν ήταν μία μέρα του καλοκαιριού;
- β') Η πιθανότητα να μην κοιτάξει το δελτίο ο Νίκος είναι 0.2 για οποιαδήποτε ημέρα του χρόνου. Όταν χάνει το δελτίο, ο Νίκος ρίχνει ένα δίκαιο κέρμα για να αποφασίσει αν θα πάρει ομπρέλα μαζί του. Τις μέρες που βλέπει το δελτίο, παίρνει πάντα μαζί του την ομπρέλα αν το δελτίο πει 'βροχή', και δεν την παίρνει ποτέ αν το δελτίο πει 'όχι βροχή'. Είναι τα γεγονότα 'ο Νίκος παίρνει την ομπρέλα' και 'το δελτίο λέει όχι βροχή' ανεξάρτητα μεταξύ τους; Εξαρτάται η απάντηση από την εποχή;

γ') Ο Νίκος κρατά την ομπρέλα του και βρέχει. Δεδομένου ότι ισχύουν οι συνθήκες στο (β'), ποια είναι η πιθανότητα ότι ο Νίκος είδε το δελτίο αν είναι καλοκαίρι και ποια αν είναι χειμώνας;

Άσκηση 3

Ένα μπλοκ πληροφοριών μεταδίδεται επαναλαμβανόμενα μέσω ενός θορυβώδους καναλιού έως ότου ληφθεί ένα μπλοκ χωρίς σφάλματα. Έστω $M > 1$ ο αριθμός των μπλοκ που απαιτούνται για μια επιτυχή μετάδοση. Ορίστε τα ακόλουθα σύνολα

- $A = \{M \text{ είναι άρτιο}\}$
- $B = \{M \text{ είναι πολλαπλάσιο του } 3\}$
- $C = \{M \text{ είναι μικρότερο ή ίσο του } 6\}$

Υποθέστε ότι για κάθε επιπλέον μπλοκ που αποστέλεται, η πιθανότητα να μην ληφθεί σωστά πέφτει κάθε φορά στο ήμισυ. Δηλαδή:

$$P(M = k) = \left(\frac{1}{2}\right)^k, \quad k = 1, 2, \dots$$

Να προσδιορίσετε τις παρακάτω πιθανότητες

- α') $P(A), P(B), P(C), P(C^c)$
- β') $P(A \cap B), P(A \setminus B), P(A \cap B \cap C)$
- γ') $P(A|B), P(B|A)$
- δ') $P(A|B \cap C), P(A \cap B|C)$

Όπου χρειαστεί, μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την ταυτότητα ('γεωμετρική σειρά'): $\sum_{n=1}^{\infty} (z)^n = \frac{z}{1-z}, \quad |z| < 1.$

Άσκηση 4

Ένας παρατηρητής πουλιών ενδιαφέρεται ιδιαίτερα για την παρατήρηση των νανόμπουφων, ενός είδους μπούφου. Έχει παρατηρήσει ότι κάθε μήνα καταγράφει από έναν έως πέντε νανόμπουφους, με ίση πιθανότητα, και ανεξάρτητα από μήνα σε μήνα. Θέλει να βγάλει στατιστικά συμπεράσματα για τις καταγραφές του σε δύο συνεχόμενους μήνες.

Έστω A το γεγονός ότι κατέγραψε συνολικά 10 νανόμπουφους σε δύο συνεχόμενους μήνες. Έστω B το γεγονός ότι κατέγραψε περισσότερους από 5 νανόμπουφους τους δύο μήνες.

- α') Είναι τα A και B ανεξάρτητα;
- β') Έστω C το γεγονός ότι κατέγραψε ακριβώς 5 νανόμπουφους τον πρώτο μήνα. Είναι τα A και B υπό συνθήκη ανεξάρτητα δεδομένου του C ;
- γ') Είναι τα A και C ανεξάρτητα; Είναι τα B και C ανεξάρτητα;
- δ') Δεδομένου ότι κατέγραψε 6 νανόμπουφους στους δύο μήνες, ποια είναι η πιθανότητα ότι κατέγραψε ακριβώς 2 νανόμπουφους τον πρώτο μήνα; Ποια είναι η πιθανότητα ότι κατέγραψε ακριβώς 3 νανόμπουφους τον πρώτο μήνα;
- ε') Δεδομένου ότι κατέγραψε 6 νανόμπουφους στους δύο μήνες, ποια είναι η πιθανότητα ότι κατέγραψε ακριβώς 2 νανόμπουφους σε τουλάχιστον έναν από τους δύο μήνες; Ποια είναι η πιθανότητα ότι κατέγραψε ακριβώς 3 νανόμπουφους σε τουλάχιστον έναν από τους δύο μήνες;