

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2022-2023
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Λύσεις Πρώτης Σειράς Ασκήσεων

Άσκηση 1.

Ο δειγματοχώρος του πειράματος μπορεί να περιγραφεί ως εξής:

$$\Omega = \{00000 \dots 000 \dots, 1, 01, 001, 0001, 00001, \dots\}$$

Έχουμε τα ακόλουθα:

$$(\alpha) A = \{1, 0001, 0000001, \dots\}$$

$$(\beta) B = \{01, 00001, 00000001, \dots\}$$

(γ) $(A \cup B)^c = \{00000 \dots, 001, 000001, \dots\}$. Το γεγονός $(A \cup B)^c$ είναι να μην κερδίσει κανείς ή να κερδίσει ο παίκτης C .

Άσκηση 2.

Έστω A το γεγονός ότι θα βρέξει σήμερα και B το γεγονός ότι θα βρέξει αύριο. Το γεγονός ότι θα βρέξει και σήμερα και αύριο μπορεί να εκφραστεί ως η τομή των γεγονότων A και B δηλαδή $A \cap B$. Επιπλέον, το γεγονός ότι θα βρέξει είτε σήμερα είτε αύριο είναι η ένωση των γεγονότων A και B δηλαδή $A \cup B$.

Ένα από τα Αξιώματα των Πιθανοτήτων είναι και το ακόλουθο:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Παρατηρούμε ότι: $P(A \cup B) = 0.3 + 0.5 - 0.2 = 0.6$, πράγμα που έρχεται σε αντίθεση με την πιθανότητα 0.7 που έχει δωθεί από τον εκφωνητή για το ίδιο γεγονός $A \cup B$ (μέρος (δ) της εκφώνησης).

Άσκηση 3.

Θεωρούμε ότι το κέντρο του πύργου βρίσκεται στο (x_0, y_0) .

(α) Ο δειγματοχώρος μπορεί να περιγραφεί ως εξής: $\Omega = \{(x, y) \mid \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \leq 10\}$.

(β) Το γεγονός η πηγή προέλευσης μιας κλήσης να βρίσκεται μεταξύ 2 χλμ. και 5 χλμ. από τον πύργο μπορεί να εκφραστεί ως:

$$E = \{(x, y) \mid 2 \leq \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \leq 5\}$$

Άσκηση 4.

(α) Γνωρίζουμε ότι: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow z = x + y - P(A \cap B)$

Άρα, $P(A \cap B) = x + y - z$

(β)

$$\begin{aligned} P(A^c \cap B^c) &= 1 - P((A^c \cap B^c)^c) \\ &= 1 - P(A \cup B) \\ &= 1 - z \end{aligned}$$

(γ)

$$\begin{aligned}P(A^c \cup B^c) &= 1 - P((A^c \cup B^c)^c) \\&= 1 - P(A \cap B) \\&= 1 - x - y + z\end{aligned}$$

(δ)

$$\begin{aligned}P(A \cap B^c) &= P(A) - P(A \cap B) \\&= z - y\end{aligned}$$

(ε)

$$\begin{aligned}P(A^c \cup B) &= 1 - P(A \cap B^c) \\&= 1 - z + y\end{aligned}$$

Άσκηση 5.

Ζητείται να υπολογίσουμε την πιθανότητα του ενδεχομένου: $A^c \cap B^c$. Παρατηρούμε ότι το ενδεχόμενο: $A \cap B = \emptyset$ Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}P(A^c \cap B^c) &= P((A \cup B)^c) = 1 - P(A \cup B) \\&= 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)] \\&= 1 - (0.45 + 0.30) \\&= 1 - 0.75 \\&= 0.25\end{aligned}$$

Άσκηση 6.

α) $P(\{\text{o } A \text{ κερδίζει τον } B\}) = P(\{\text{o } A \text{ να φέρει } 4\}) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

β) $P(\{\text{o } B \text{ κερδίζει τον } C\}) = P(\{\text{o } C \text{ φέρνει } 2\}) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

γ) $P(\{\text{o } C \text{ κερδίζει τον } D\}) = P(\{\text{o } C \text{ φέρνει } 2\} \text{ και } \{\text{o } D \text{ φέρνει } 1\}) + P(\{\text{o } C \text{ φέρνει } 6\}) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$
καθώς τα παραπάνω ενδεχόμενα είναι ανεξάρτητα.

δ) $P(\{\text{o } D \text{ κερδίζει τον } A\}) = P(\{\text{o } D \text{ φέρνει } 5\}) + P(\{\text{o } D \text{ φέρνει } 1\} \text{ και } \{\text{o } A \text{ φέρνει } 0\}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$
καθώς τα παραπάνω ενδεχόμενα είναι ανεξάρτητα.

Άσκηση 7.

(α) Από τα δεδομένα έχουμε ότι $P(A) = 3/7$, $P(B \cap C) = 0$ και $P(A \cap B \cap C) = 0$. Χρησιμοποιώντας τους νόμους του De Morgan έχουμε ότι $(B^c \cup C^c)^c = B \cap C$. Οπότε έχουμε ότι:

$$P(A \cup (B^c \cup C^c)^c) = P(A \cup (B \cap C)) = P(A) + P(B \cap C) - P(A \cap (B \cap C)) = 3/7.$$

(β) Από τα δεδομένα έχουμε ότι $P(A) = 1/2$, $P(B \cap C) = 1/3$ και $P(A \cap C) = 0$. Χρησιμοποιώντας τους νόμους του De Morgan έχουμε ότι $(B^c \cup C^c)^c = B \cap C$. Οπότε έχουμε ότι:

$$P(A \cup (B^c \cup C^c)^c) = P(A \cup (B \cap C)) = P(A) + P(B \cap C) - P(A \cap (B \cap C)) = 5/6,$$

όπου $A \cap B \cap C = \emptyset$ (και έτσι $P(A \cap B \cap C) = 0$) αφού $A \cap C = \emptyset$ και $A \cap B \cap C \subseteq A \cap C$.

(γ) Έχουμε ως δεδομένο ότι $P(A^c \cap (B^c \cup C^c)) = 0.65$ και με τους νόμους του De Morgan έχουμε ότι $(A^c \cap (B^c \cup C^c))^c = A \cup (B^c \cup C^c)^c$ που είναι και το ζητούμενο. Οπότε:

$$P(A \cup (B^c \cup C^c)^c) = 1 - P(A^c \cap (B^c \cup C^c)) = 0.35$$