

ΛΥΣΕΙΣ ΠΡΟΟΔΟΥ**ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>**

Ονομάζουμε τα ενδεχόμενα ως εξής:

$$K_i = \{ \text{Το } i\text{-στο άτομο έχει καστανά ματιά} \}$$

$$C_i = \{ \text{Το } i\text{-στο άτομο έχει σκουρά μαλλιά} \}$$

Θεωρούμε ότι όλα τα ενδεχόμενα είναι ανεξάρτητα. Επίσης, από την εκφώνηση έχουμε:  $P(K_i) = \frac{1}{2}$  και  $P(C_i) = \frac{1}{5}$ . Τότε:

$$\begin{aligned} \alpha) P(K_1 \cup K_2 \cup K_3) &= P(K_1) + P(K_2) + P(K_3) - P(K_1 \cap K_2) - P(K_2 \cap K_3) \\ &\quad - P(K_1 \cap K_3) + P(K_1 \cap K_2 \cap K_3) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} = \frac{7}{8} = \underline{\underline{0.875}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta) P((K_1 \cap C_1) \cup (K_2 \cap C_2)) &= P(K_1 \cap C_1) + P(K_2 \cap C_2) - P((K_1 \cap C_1) \cap (K_2 \cap C_2)) \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{5} + \frac{1}{2} \frac{1}{5} - \frac{1}{2} \frac{1}{5} \frac{1}{2} \frac{1}{5} = \frac{19}{100} = \underline{\underline{0.19}}. \end{aligned}$$

**ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>**

Για να υπολογίσουμε τη ζητούμενη πιθανότητα, πρέπει να μετρήσουμε (i) όλα τα δυνατά διαγωνίσματα που μπορούν να προκύψουν και στη συνέχεια (ii) όλα τα δυνατά διαγωνίσματα που περιέχουν ως 4<sup>ο</sup> θέμα την 3<sup>η</sup> παραλλαγή του θέματος της Συνδυαστικής.

$$\begin{array}{cccc} (i) & BE_1 & BE_2 & BE_3 & BE_4 \\ & \Sigma\omega_1 & \Sigma\omega_2 & \Sigma\omega_3 & \Sigma\omega_4 \\ & DE_1 & DE_2 & DE_3 & DE_4 \\ & BE_1 & BE_2 & BE_3 & BE_4 \\ & \Sigma\pi_1 & \Sigma\pi_2 & \Sigma\pi_3 & \Sigma\pi_4 \end{array}$$

- Υπάρχουν  $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^5$  διαφορετικοί τρόποι δημιουργίας ενός διαγωνίσματος επιλέγοντας μία από τις 4 παραλλαγές για κάθε θέμα, π.χ.  $BE_2, \Sigma\omega_1, DE_4, BE_4, \Sigma\pi_3$
- Υπάρχουν  $5!$  διαφορετικές διατάξεις (μεταθέσεις) πέντε θεμάτων για καθένα από τα  $4^5$  παραπάνω διαγωνίσματα.

$\therefore$  Σύμφωνα με τη θεμελιώδη αρχή της αναρίθμησης, το πλήθος όλων

των δυνατών διαγωνισμάτων είναι :  $4^5 \cdot 5! = 1024 \cdot 120 = \underline{\underline{122\,880}}$ .

(2)

(ii) Αν η 4<sup>η</sup> θέση στο διαγώνισμα καλύπτεται από των 3<sup>η</sup> παραλλαγή του θέματος της Συνδυαστικής (το  $\Sigma\omega_3$ ) τότε:

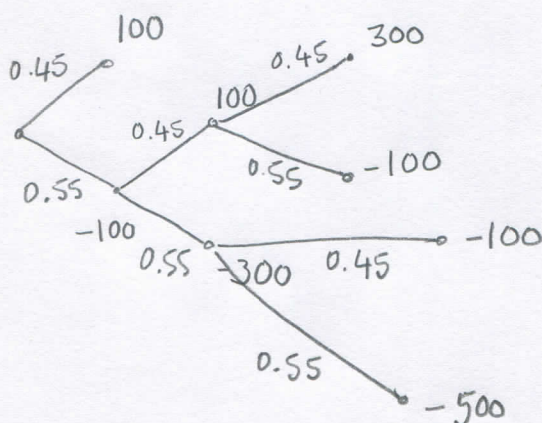
- Υπάρχουν  $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^4$  διαφορετικοί τρόποι δημιουργίας του υπολοίπου διαγωνίσματος επιλέγοντας μία από τις 4 παραλλαγές για τα υπόλοιπα αντικείμενα (ΒΕ, ΔΕ, Βεγ, Σπ)
- Υπάρχουν  $4!$  διαφορετικές μεταθέσεις των υπολοίπων 4 θέμάτων.

Επομένως, όλα τα δυνατά διαγωνίσματα που περιέχουν ως 4<sup>η</sup> θέμα το  $\Sigma\omega_3$  είναι:  $4^4 \cdot 4! = 256 \cdot 24 = \underline{\underline{6144}}$ .

Επομένως, η ζητούμενη πιθανότητα είναι:  $\frac{6144}{122\,880} = \underline{\underline{0.05 = 5\%}}$ .

### ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>

(α) Το δένδρο έχει ως εξής:



(β) Με βάση το δενδρικό διάγραμμα, η β.π. της τ.μ.  $X$  είναι:

$$P_X(x) = \begin{cases} 0.55^3 & x = -500 \\ 2 \cdot 0.45 \cdot 0.55^2 & x = -100 \\ 0.45 & x = 100 \\ 0.45^2 \cdot 0.55 & x = 300 \end{cases} = \begin{cases} 0.1664 & x = -500 \\ 0.2723 & x = -100 \\ 0.45 & x = 100 \\ 0.1114 & x = 300 \end{cases}$$

(3)

$$(γ) P(X > 0) = P_X(100) + P_X(300) = 0.45 + 0.1114 = \underline{\underline{0.5614}}$$

$$(δ) E[X] = \sum_x x P_X(x) = -500 \times 0.1664 - 100 \times 0.2723 + 100 \times 0.45 + 300 \times 0.1114 = \underline{\underline{-32}}$$

$$E[X^2] = \sum_x x^2 P_X(x) = (-500)^2 \times 0.1664 + (-100)^2 \times 0.2723 + 100^2 \times 0.45 + 300^2 \times 0.1114 = 58849$$

$$\therefore \text{Var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = 58849 - (-32)^2 = \underline{\underline{57824}}$$

$$\therefore \sigma_X = \sqrt{\text{Var}(X)} = 240.47$$

ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>

Έστω  $X$ : πλήθος των κριτών που ταξινομούν το Πιατό ως νόστιμο.

Τότε  $X \sim \Delta(n=7, p=0.7)$  και επομένως

$$P_X(k) = \binom{7}{k} 0.7^k 0.3^{7-k}; \quad k=0, 1, 2, \dots, 7.$$

$$E[X] = np = 7 \cdot 0.7 = 4.9 \quad \text{Var}(X) = np(1-p) = 1.47$$

$$(α) P(X=3) = P_X(3) = \binom{7}{3} 0.7^3 0.3^4 = \underline{\underline{0.09724}} = 9.724\%$$

$$\begin{aligned} (β) P(X \geq 4) &= P_X(4) + P_X(5) + P_X(6) + P_X(7) \\ &= \binom{7}{4} 0.7^4 0.3^3 + \binom{7}{5} 0.7^5 0.3^2 + \binom{7}{6} 0.7^6 0.3^1 + \binom{7}{7} 0.7^7 0.3^0 \\ &= \underline{\underline{0.874}}. \end{aligned}$$

(γ) Έστω η τ.μ.  $Y = \text{γύνοςο πόντων}$ . Τότε

$$Y = 3X - 1(7-X) = 3X - 7 + X = 4X - 7.$$

Συνεπώς η τ.μ.  $Y$  παίρνει τιμές  $\{-7, -3, 1, 5, 9, 13, 17, 21\}$ .

$$P_Y(4k-7) = \binom{7}{k} 0.7^k 0.3^{7-k}; \quad k=0, 1, 2, \dots, 7$$

(4)

$$E[Y] = E[4X-7] = 4E[X]-7 = 4 \times 4.9 - 7 = \underline{\underline{12.6}}$$

$$\text{var}(Y) = \text{var}(4X-7) = 16 \text{var}(X) = 16 \times 1.47 = \underline{\underline{23.52}}$$

(δ) Έστω  $Z$ : το πλήθος των κριτών έως τον πρώτο να δει κρίνει το νιάτο ως άνοστο. Προφανώς,

$$Z \sim \text{Geo}(p=0.3).$$

$$P_Z(z) = 0.7^{z-1} \cdot 0.3; \quad z=1, 2, 3, \dots$$

$$E[Z] = 1/p = 1/0.3 = 3.33$$

Επομένως,  $P(Z=5) = 0.7^4 \times 0.3 = \underline{\underline{0.072}}$  και  $E[Z] = \underline{\underline{3.33}}$ .

**ΘΕΜΑ 5:** (α)  $P(X=Y) = \frac{3}{12} \Rightarrow P_{X,Y}(1,1) + P_{X,Y}(2,2) + P_{X,Y}(3,3) = \frac{3}{12}$

$$\Rightarrow \frac{1}{12} + P_{X,Y}(2,2) + \frac{1}{12} = \frac{3}{12} \Rightarrow P_{X,Y}(2,2) = \underline{\underline{\frac{1}{12}}}$$

Επίσης,  $\sum_{x,y} P_{X,Y}(x,y) = 1 \Rightarrow P_{X,Y}(3,2) = \underline{\underline{\frac{2}{12}}}$ .

(β)  $P_X(x) = \sum_y P_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 4/12 & x=1 \\ 5/12 & x=2 \\ 3/12 & x=3 \end{cases}$

$$P_Y(y) = \sum_x P_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 3/12 & y=1 \\ 5/12 & y=2 \\ 4/12 & y=3 \end{cases}$$

(γ)  $P_{Y/X}(y/1) = \frac{P_{X,Y}(1,y)}{P_X(1)} = \begin{cases} \frac{1/12}{4/12} = \frac{1}{4} & y=1 \\ \frac{2/12}{4/12} = \frac{2}{4} & y=2 \\ \frac{1/12}{4/12} = \frac{1}{4} & y=3 \end{cases}$

(5)

$$(6) \quad E[Y/X=1] = \sum_y y P_{Y/X}(y/1)$$

$$= 1 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{2}{4} + 3 \times \frac{1}{4} = \frac{8}{4} = 2 //$$