

Πανεπιστήμιο Κρήτης - Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών
Θεωρία Πιθανοτήτων - Πρόοδος
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης
4 Δεκεμβρίου 2021 - Διάρκεια: 2.5 Ώρες

Θέμα 1 - 20 μονάδες. Βασικές Έννοιες

Θεωρείστε ότι σε έναν πληθυσμό η πιθανότητα να έχει ένα άτομο καστανά μάτια ισούται με $\frac{1}{2}$ και η πιθανότητα να έχει σγουρά μαλλιά ισούται με $\frac{1}{5}$.

(α) Επιλέγουμε τυχαία τρία άτομα από τον πληθυσμό. Ποια η πιθανότητα τουλάχιστον ένα από αυτά να έχει καστανά μάτια;

(β) Επιλέγουμε τυχαία δύο άτομα από τον πληθυσμό. Ποια η πιθανότητα τουλάχιστον ένα από αυτά να έχει καστανά μάτια ΚΑΙ σγουρά μαλλιά;

Διατυπώστε σαφώς οποιαδήποτε υπόθεση ανεξαρτησίας χρησιμοποιήσετε στα ερωτήματα (α) και (β).

Θέμα 2 - 20 μονάδες. Συνδυαστική

Ο κ. Τσακαλάκης διδάσκει το μάθημα των Πιθανοτήτων. Για την πρόοδο του μαθήματος αποφασίζει να μην δώσει σε όλους τους φοιτητές τα ίδια θέματα προκειμένου να αποφευχθούν φαινόμενα αντιγραφής που παρατηρήθηκαν στις σειρές ασκήσεων. Για καθένα από τα **5** θέματα (Βασικές Έννοιες, Συνδυαστική, Δένδρα και τ.μ., Δοκιμές Bernoulli, και από κοινού κατανομές) έχει προετοιμάσει **4** διαφορετικές παραλλαγές. Επιπλέον, αλλάζει και την σειρά των θεμάτων για κάθε εξεταζόμενο. Να υπολογιστεί η πιθανότητα ένας εξεταζόμενος να έχει ως **4ο** Θέμα την **3η** παραλλαγή του θέματος της Συνδυαστικής.

Θέμα 3 - 20 μονάδες. Δένδρα και περιγραφή τυχαίων μεταβλητών

Denver, 23/11/1991. Οι εν ενεργεία πρωταθλητές Chicago Bulls, αντιμετωπίζουν εκτός έδρας τους Denver Nuggets για τη regular season του NBA. Ενώ ο Michael Jordan βρίσκεται στη γραμμή των ελευθέρων βολών, ο center των Denver Nuggets, Dikembe Mutombo, τον προκαλεί να εκτελέσει τη βολή με κλειστά μάτια. Ο Michael Jordan αποδέχεται την πρόκληση, και ... ευστοχεί!

Υστερα από 30 χρόνια, οι δύο αντίπαλοι και φίλοι συναντώνται ξανά, και αποφασίζουν τα θυμηθούν τα παλιά. Πιο συγκεκριμένα, ο Mutombo προκαλεί τον Jordan να βάλουν το εξής στοίχημα:

- Ο Jordan θα εκτελέσει ελεύθερες βολές με κλειστά μάτια.
- Ο Mutombo ποντάρει 100\$ στο να χάσει ο Jordan την πρώτη ελεύθερη βολή. Αν συμβεί αυτό (με πιθανότητα 0.45, καθώς τα χρόνια έχουν περάσει), το στοίχημα λήγει και ο Mutombo παίρνει το κέρδος του (100\$) και φεύγει.
- Αν ο Jordan ευστοχήσει στην πρώτη ελεύθερη βολή (με πιθανότητα 0.55), ο Mutombo ποντάρει από 200\$ σε κάθε μία από τις επόμενες 2 ελεύθερες βολές που θα εκτελέσει ο Jordan, και μετά το στοίχημα λήγει.

Ο Jordan, προφανώς, αποδέχεται την πρόκληση. Έστω X η τ.μ. που αντιπροσωπεύει το συνολικό κέρδος του Mutombo. Ενδεχόμενες αρνητικές τιμές της τ.μ. X υποδηλώνουν ζημία/χάσιμο.

- (α) Δημιουργήστε το δενδρικό διάγραμμα για το παραπάνω πείραμα τύχης.
 (β) Περιγράψτε πλήρως την τ.μ. X (πεδίο τιμών και συνάρτηση πιθανότητας).
 (γ) Υπολογίστε την πιθανότητα όπως ο Mutombo κερδίσει χρήματα από το στοίχημα με τον Jordan.
 (δ) Υπολογίστε το αναμενόμενο κέρδος του Mutombo, $E[X]$, καθώς και τη διασπορά αυτού, $var(X)$.

Θέμα 4 - 20 μονάδες. Δοκιμές Bernoulli

Συμμετέχετε στον μεγαλύτερο διαγωνισμό μαγειρικής “Ultra Mega Master Chef Got Talent”, στον οποίο υπάρχουν 7 κριτές. Κάθε κριτής, ανεξάρτητα από τους άλλους, κρίνει το πιάτο σας και το ταξινομεί ως *νόστιμο* ή *άνοστο*. Το σημερινό πιάτο που ετοιμάσατε είναι πετυχημένο, οπότε η πιθανότητα ένας κριτής να το κρίνει ως *νόστιμο* είναι $p = 0.7$.

- (α) Ποια είναι η πιθανότητα ακριβώς 3 από τους κριτές να θεωρήσουν ότι το πιάτο είναι νόστιμο; Ποιος είναι ο μέσος αριθμός κριτών που θεωρεί ότι το πιάτο σας είναι νόστιμο;
 (β) Για να περάσετε στην επόμενη φάση του διαγωνισμού, πρέπει τουλάχιστον 4 από τους κριτές να κατατάζουν το πιάτο σας ως νόστιμο. Με ποια πιθανότητα συμβαίνει αυτό;
 (γ) Όταν ένας κριτής βαθμολογεί το πιάτο σας ως *νόστιμο*, κερδίζετε 3 πόντους, ενώ όταν το βαθμολογεί ως *άνοστο* χάνετε 1 πόντο. Έστω Y τ.μ. που περιγράφει το σύνολο των πόντων που συγκεντρώνετε. Υπολογίστε τη συνάρτηση πιθανότητας, $p_Y(y)$, τη μέση τιμή, $E[Y]$, και τη διασπορά, $var(Y)$, της τ.μ. Y .
 (δ) Ποια είναι η πιθανότητα ο πρώτος κριτής που θα κρίνει το πιάτο σας ως *άνοστο* να είναι ο κριτής 5; Ποιος είναι ο μέσος αριθμός κριτών μέχρι να βρεθεί ο πρώτος που θα κρίνει το πιάτο σας ως *άνοστο*;

Θέμα 5 - 20 μονάδες. Από κοινού κατανομές

Στον παρακάτω πίνακα φαίνεται η από κοινού συνάρτηση πιθανότητας (σ.π.) δύο τυχαίων μεταβλητών X και Y . Οι τιμές που αντιστοιχούν στις πιθανότητες $p_{X,Y}(2,2)$ και $p_{X,Y}(3,2)$ δεν έχουν προσδιοριστεί. Δίνεται ότι $P(X = Y) = 3/12$.

- (α) Υπολογίστε τις τιμές $p_{X,Y}(2,2)$ και $p_{X,Y}(3,2)$ που λείπουν.
 (β) Υπολογίστε την οριακή σ.π. της τ.μ. X , $p_X(x)$. Ομοίως για την τ.μ. Y .
 (γ) Προσδιορίστε τη δεσμευμένη σ.π. της Y δεδομένου ότι $X = 1$, $p_{Y|X}(y|x=1)$.
 (δ) Υπολογίστε τη δεσμευμένη μέση τιμή της Y δεδομένου ότι $X = 1$, $E[Y|X = 1]$.
 (ε) Υπολογίστε τη μέση τιμή, $E[X]$, και τη διασπορά, $var(X)$, της τ.μ. X .

		X		
		$x = 1$	$x = 2$	$x = 3$
Y	$y = 1$	1/12	2/12	0
	$y = 2$	2/12	;	;
	$y = 3$	1/12	2/12	1/12