

**Άσκηση 1**

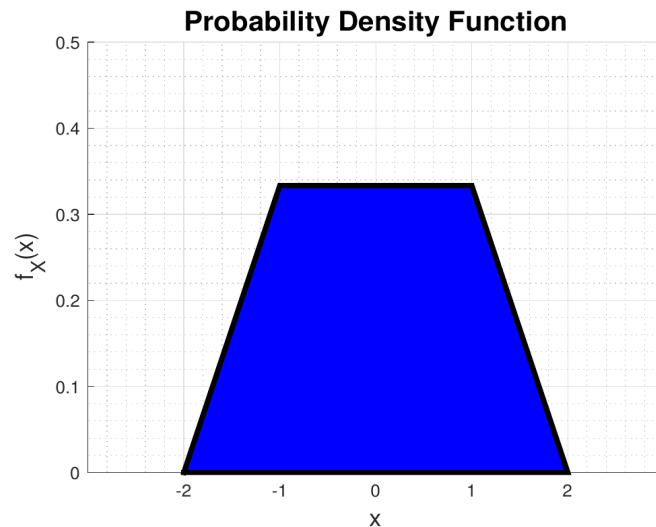
Έστω  $X$  συνεχής Τ.Μ. με Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας (ΣΠΠ) (PDF) που δίνεται από τον παρακάτω τύπο:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & x < -2 \\ \frac{1}{3}(x+2) & -2 \leq x < -1 \\ \frac{1}{3} & -1 \leq x < 1 \\ \frac{1}{3}(-x+2) & 1 \leq x < 2 \\ 0 & x \geq 2 \end{cases}$$

- (α) Να σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της  $f_X(x)$ .
- (β) Να αποδείξετε ότι ισχύει η Συνθήκη Κανονικοποίησης:  $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = 1$ .
- (γ) Να υπολογιστεί η πιθανότητα  $P(\frac{3}{2} \leq X \leq 2)$ .
- (δ) Να υπολογιστεί η πιθανότητα  $P(\frac{3}{2} \leq X \leq 2 \mid 0 \leq X \leq 2)$ .

**Λύση**

- (α) Σχεδιάζοντας κάθε κλάδο της  $f_X(x)$  στα αντίστοιχα διαστήματα, λαμβάνουμε την γραφική παράσταση (περιορισμένη στο διάστημα  $[-2, 2]$ ) που φαίνεται στο Σχήμα 1.



Σχήμα 1: Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας  $f_X(x)$ .

- (β) Η  $f_X(x)$  είναι μία έγκυρη Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας, καθώς ικανοποιεί την Συνθήκη Κανονικοποίησης:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx &= \int_{-\infty}^{-2} f_X(x)dx + \int_{-2}^2 f_X(x)dx + \int_2^{+\infty} f_X(x)dx \\ &= \int_{-\infty}^{-2} 0dx + \int_{-2}^2 f_X(x)dx + \int_2^{+\infty} 0dx = \int_{-2}^2 f_X(x)dx = \frac{(4+2) \cdot \frac{1}{3}}{2} = \frac{6 \cdot \frac{1}{3}}{2} = \frac{2}{2} = 1\end{aligned}$$

, όπου το ολοκλήρωμα  $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx$  υπολογίστηκε ως το εμβαδόν μεταξύ του γραμμοσκιασμένου τραπεζίου στο Σχήμα 1 και του άξονα x'x. Εναλλακτικά, θα μπορούσε να υπολογιστεί με χρήση τεχνικών ολοκλήρωσης ως εξής:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx &= \int_{-\infty}^{-2} f_X(x)dx + \int_{-2}^{-1} f_X(x)dx + \int_{-1}^1 f_X(x)dx + \int_1^2 f_X(x)dx + \int_2^{+\infty} f_X(x)dx \\ &= \int_{-\infty}^{-2} 0dx + \int_{-2}^{-1} \frac{1}{3}(x+2)dx + \int_{-1}^1 \frac{1}{3}dx + \int_1^2 \frac{1}{3}(-x+2)dx + \int_2^{+\infty} 0dx \\ &= \int_{-2}^{-1} \frac{1}{3}(x+2)dx + \int_{-1}^1 \frac{1}{3}dx + \int_1^2 \frac{1}{3}(-x+2)dx = \frac{1}{3} \left[ \frac{x^2}{2} \right]_{-2}^{-1} + \frac{2}{3} \left[ x \right]_{-2}^{-1} + \frac{1}{3} \left[ x \right]_{-1}^1 - \frac{1}{3} \left[ \frac{x^2}{2} \right]_1^2 + \frac{2}{3} \left[ x \right]_1^2 \\ &= \frac{1}{3} \left( \frac{1}{2} - 2 \right) + \frac{2}{3} (-1 + 2) + \frac{1}{3} (1 + 1) - \frac{1}{3} \left( 2 - \frac{1}{2} \right) + \frac{2}{3} (2 - 1) \\ &= \frac{1}{3} \left( -\frac{3}{2} \right) + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \left( \frac{3}{2} \right) + \frac{2}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{6}{3} - \frac{1}{2} = 2 - 1 = 1\end{aligned}$$

- (γ) Για τον υπολογισμό της ζητούμενης πιθανότητας, ελέγχουμε σε ποιον κλάδο της  $f_X(x)$  αντιστοιχεί το προς εξέταση γεγονός, και έχουμε:

$$\begin{aligned}P\left(\frac{3}{2} \leq X \leq 2\right) &= \int_{\frac{3}{2}}^2 f_X(x)dx = \int_{\frac{3}{2}}^2 \frac{1}{3}(-x+2)dx = -\frac{1}{3} \left[ \frac{x^2}{2} \right]_{\frac{3}{2}}^2 + \frac{2}{3} \left[ x \right]_{\frac{3}{2}}^2 \\ &= -\frac{1}{3} \left( 2 - \frac{9}{8} \right) + \frac{2}{3} \left( 2 - \frac{3}{2} \right) = -\frac{1}{3} \left( \frac{7}{8} \right) + \frac{2}{3} \left( \frac{1}{2} \right) = -\frac{7}{24} + \frac{1}{3} = \frac{1}{24}\end{aligned}$$

- (δ) Για τον υπολογισμό της ζητούμενης πιθανότητας, ελέγχουμε σε ποιον κλάδο της  $f_X(x)$  αντιστοιχεί το προς εξέταση γεγονός, και έχουμε:

$$\begin{aligned}P\left(\frac{3}{2} \leq X \leq 2 \mid 0 \leq X \leq 2\right) &= \frac{P\left(\frac{3}{2} \leq X \leq 2, 0 \leq X \leq 2\right)}{P(0 \leq X \leq 2)} = \frac{P\left(\frac{3}{2} \leq X \leq 2\right)}{P(0 \leq X \leq 2)} = \frac{\int_{\frac{3}{2}}^2 f_X(x)dx}{\int_0^2 f_X(x)dx} \\ &= \frac{\int_{\frac{3}{2}}^2 \frac{1}{3}(-x+2)dx}{\int_0^1 \frac{1}{3}dx + \int_1^2 \frac{1}{3}(-x+2)dx} = \frac{-\frac{1}{3} \left[ \frac{x^2}{2} \right]_{\frac{3}{2}}^2 + \frac{2}{3} \left[ x \right]_{\frac{3}{2}}^2}{\frac{1}{3} \left[ x \right]_0^1 + \left( -\frac{1}{3} \left[ \frac{x^2}{2} \right]_1^2 + \frac{2}{3} \left[ x \right]_1^2 \right)} = \frac{-\frac{7}{24} + \frac{1}{3}}{\frac{1}{3} + \left( -\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \right)} = \frac{\frac{1}{24}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{24} = \frac{1}{12}\end{aligned}$$

**Άσκηση 2**

Έστω συνεχής Τ.Μ.  $X$ , με Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής (ΑΣΚ) (CDF) που δίνεται από τον παρακάτω τύπο:

$$F_X(x) = \begin{cases} c - \frac{4}{x^2} & x \geq 2 \\ 0 & x < 2 \end{cases}$$

όπου  $c$  σταθερά με  $c \in \mathbb{R}$ . Να υπολογιστούν:

- (α) Η σταθερά  $c$ .
- (β) Η Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας (ΣΠΠ) της Τ.Μ.  $X$ ,  $f_X(x)$ .
- (γ) Η μέση τιμή της Τ.Μ.  $X$ ,  $E[X]$ .

**Λύση**

**Παρατήρηση:** Στην περίπτωση που δίνεται η Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής μίας Τ.Μ.  $X$ , και όχι η Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας αυτής, η Συνθήκη Κανονικοποίησης λαμβάνει την ακόλουθη μορφή:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1 \end{cases}$$

- (α) Σύμφωνα με την θεωρία, θα πρέπει να ισχύει η Συνθήκη Κανονικοποίησης. Με βάση την δοσμένη Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής, έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(c - \frac{4}{x^2}\right) = 1 \Leftrightarrow \boxed{c = 1}$$

Άρα, τελικά, η Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής (ΑΣΚ) (CDF) θα δίνεται από τον τύπο:

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - \frac{4}{x^2} & x \geq 2 \\ 0 & x < 2 \end{cases}$$

- (β) Με γνωστή την Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής, η Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας δίνεται από τον εξής τύπο:

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$$

Με βάση την δοσμένη Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής, έχουμε:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{8}{x^3} & x \geq 2 \\ 0 & x < 2 \end{cases}$$

- (γ) Με βάση τον τύπο ορισμού της μέσης τιμής, έχουμε:

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx = \int_2^{+\infty} x f_X(x) dx = \int_2^{+\infty} x \cdot \left(\frac{8}{x^3}\right) dx \\ &= \int_2^{+\infty} \frac{8}{x^2} dx = 8 \left[ -\frac{1}{x} \right]_2^{+\infty} = 8 \left( 0 + \frac{1}{2} \right) = \frac{8}{2} = 4 \end{aligned}$$

**Άσκηση 3**

Έστω  $X$  συνεχής Τ.Μ. που ακολουθεί Ομοιόμορφη Κατανομή στο διάστημα  $[a, b]$ , με  $E[X] = 6$  και  $P(X < 5) = 0.4$ .

(α) Να σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της  $f_X(x)$ .

(β) Η πιθανότητα  $P(X \geq 8)$ .

**Λύση**

(α) **Παρατήρηση:** Σε αυτή την άσκηση μας δίνεται η κατανομή που ακολουθεί η Τ.Μ.  $X$ , χωρίς όμως να προσδιορίζεται το διάστημα  $[a, b]$  στο οποίο ακολουθεί αυτή την κατανομή. Τα άκρα του εν λόγω διαστήματος  $(a, b)$  θα υπολογιστούν με βάση τα δεδομένα της άσκησης.

Από την θεωρία γνωρίζουμε πως όταν η συνεχής Τ.Μ.  $X$  ακολουθεί Ομοιόμορφη Κατανομή στο διάστημα  $[a, b]$ , η Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας (ΣΠΠ) (PDF) αυτής θα δίνεται από τον παρακάτω τύπο:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Επίσης, είναι γνωστό πως όταν η συνεχής Τ.Μ.  $X$  ακολουθεί Ομοιόμορφη Κατανομή στο διάστημα  $[a, b]$ , η μέση τιμή της δίνεται από τον τύπο:

$$E[X] = \frac{a+b}{2}$$

Με βάση την παραπάνω σχέση, και δεδομένου ότι  $E[X] = 6$  από την εκφώνηση της άσκησης, έχουμε:

$$E[X] = 6 \Rightarrow \frac{a+b}{2} = 6 \Rightarrow a+b = 12$$

Ακόμη, με βάση την εκφώνηση της άσκησης, έχουμε:

$$\begin{aligned} P(X < 5) = 0.4 &\Rightarrow \int_{-\infty}^5 f_X(x) dx = 0.4 \Rightarrow \int_{-\infty}^a f_X(x) dx + \int_a^5 f_X(x) dx = 0.4 \\ &\Rightarrow \int_{-\infty}^a 0 dx + \int_a^5 \frac{1}{b-a} dx = 0.4 \Rightarrow \int_a^5 \frac{1}{b-a} dx = 0.4 \\ &\Rightarrow \frac{1}{b-a} \left[ x \right]_a^5 = 0.4 \Rightarrow \frac{1}{b-a} (5-a) = 0.4 \Rightarrow 5-a = 0.4b - 0.4a \Rightarrow 0.6a + 0.4b = 5 \end{aligned}$$

Επιλύοντας το παρακάτω σύστημα εξισώσεων που προκύπτει:

$$\begin{cases} a+b = 12 \\ 0.6a + 0.4b = 5 \end{cases}$$

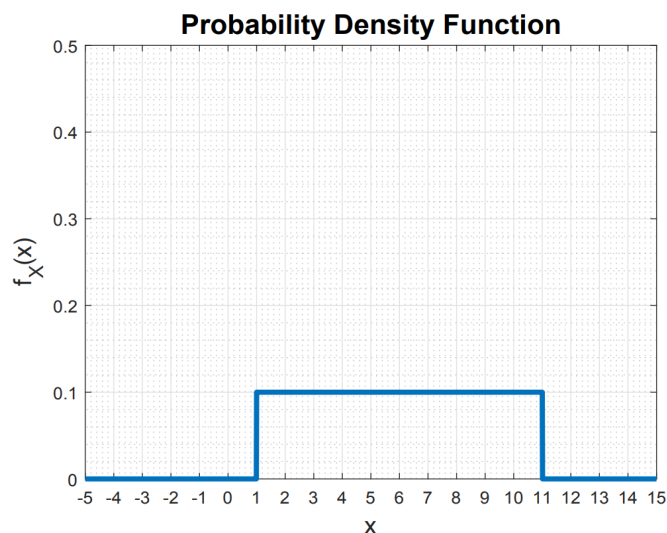
, με αγνώστους τα  $a, b$ , βρίσκουμε ότι:

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 11 \end{cases}$$

Άρα, η Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας (ΣΠΠ) (PDF) θα είναι τελικά :

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{10} & , 1 \leq x \leq 11 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Σχεδιάζοντας κάθε κλάδο της  $f_X(x)$  στα αντίστοιχα διαστήματα, λαμβάνουμε την γραφική παράσταση (περιορισμένη στο διάστημα  $[-5, 15]$ ) που φαίνεται στο Σχήμα 2.



Σχήμα 2: Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας  $f_X(x)$ .

**Παρατήρηση:** Η  $f_X(x)$  είναι μία *έγκυρη* Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας, καθώς ικανοποιεί την Συνθήκη Κανονικοποίησης:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx &= \int_{-\infty}^1 f_X(x) dx + \int_1^{11} f_X(x) dx + \int_{11}^{+\infty} f_X(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^1 0 dx + \int_1^{11} f_X(x) dx + \int_{11}^{+\infty} 0 dx = \int_1^{11} f_X(x) dx = \int_1^{11} \frac{1}{10} \left[ x \right]_1^{11} = \frac{1}{10} (11 - 1) = \frac{10}{10} = 1 \end{aligned}$$

**(β)** Για τον υπολογισμό της ζητούμενης πιθανότητας, ελέγχουμε σε ποιον κλάδο της  $f_X(x)$  αντιστοιχεί το προς εξέταση γεγονός, και έχουμε :

$$\begin{aligned} P(X \geq 8) &= \int_8^{+\infty} f_X(x) dx = \int_8^{11} f_X(x) dx + \int_{11}^{+\infty} f_X(x) dx = \int_8^{11} \frac{1}{10} dx + \int_{11}^{+\infty} 0 dx = \int_8^{11} \frac{1}{10} dx \\ &= \frac{1}{10} \left[ x \right]_8^{11} = \frac{1}{10} (11 - 8) = \frac{1}{10} (3) = 0.3 \end{aligned}$$

**Άσκηση 4**

Ένας μεγιστάνας θα ζήσει ακόμα ένα χρονικό διάστημα σε έτη, το οποίο μοντελοποιείται ως μία συνεχής Τ.Μ.  $X$  με Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας που δίνεται από τον παρακάτω τύπο:

$$f_X(x) = \begin{cases} -2x + 2 & , 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Ο μεγιστάνας παντρεύεται μια νεαρή ηθοποιό, και συνάπτουν προγαμιαίο συμβόλαιο που προβλέπει πως, όταν αυτός πεθάνει, η ηθοποιός θα εισπράξει κληρονομιά (σε εκατομμύρια ευρώ) που μοντελοποιείται ως Τ.Μ.  $Y$  που δίνεται από τον εξής τύπο:

$$Y = 10 \cdot X + 2$$

- (α) Να υπολογιστεί το μέσο διάστημα ζωής που απομένει ακόμα στον μεγιστάνα πριν πεθάνει.
- (β) Να υπολογιστεί η διασπορά της Τ.Μ.  $X$ ,  $var(X)$ .
- (γ) Να υπολογιστεί η μέση τιμή της κληρονομιάς (σε εκατομμύρια ευρώ) που θα εισπράξει η ηθοποιός, όταν ο μεγιστάνας πεθάνει.

**Λύση**

- (α) Σύμφωνα με την εκφώνηση της άσκησης, ζητείται να υπολογιστεί η μέση τιμή της Τ.Μ.  $X$ ,  $E[X]$ . Με βάση τον τύπο ορισμού της μέσης τιμής, έχουμε:

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx = \int_0^1 x(-2x + 2) dx = \int_0^1 (-2x^2 + 2x) dx = -2 \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^1 + [x^2]_0^1 \\ &= -2 \left( \frac{1}{3} - 0 \right) + (1 - 0) = \frac{-2}{3} + 1 = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

- (β) Για τον υπολογισμό της διασποράς της Τ.Μ.  $X$ ,  $var(X)$ , θα χρησιμοποιήσουμε την γνωστή από την θεωρία σχέση:

$$var(X) = E[X^2] - (E[X])^2$$

Για τον υπολογισμό της ροπής 2ης τάξης,  $E[X^2]$ , έχουμε:

$$\begin{aligned} E[X^2] &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x) dx = \int_0^1 x^2(-2x + 2) dx = \int_0^1 (-2x^3 + 2x^2) dx = -2 \left[ \frac{x^4}{4} \right]_0^1 + 2 \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^1 \\ &= -2 \left( \frac{1}{4} - 0 \right) + 2 \left( \frac{1}{3} - 0 \right) = \frac{-1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Άρα, η διασπορά της Τ.Μ.  $X$ ,  $var(X)$  θα είναι τελικά:

$$var(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{1}{6} - \left( \frac{1}{3} \right)^2 = \frac{1}{6} - \frac{1}{9} = \frac{1}{18}$$

- (γ) Σύμφωνα με την εκφώνηση της άσκησης, ζητείται να υπολογιστεί η μέση τιμή της Τ.Μ.  $Y$ ,  $E[Y]$ . Εκμεταλλευόμενοι την γραμμική σχέση που συνδέει τις Τ.Μ.  $X$  και  $Y$  (και κάνοντας χρήση της αντίστοιχης ιδιότητας), έχουμε:

$$E[Y] = E[10 \cdot X + 2] = 10 \cdot E[X] + 2 = 10 \cdot \frac{1}{3} + 2 = \frac{16}{3} \approx 5.333$$

**Άσκηση 5**

Η συνεχής Τ.Μ.  $X$  ακολουθεί την Κανονική Κατανομή με μέση τιμή  $\mu = 10$  και διασπορά  $\sigma^2 = 16$ :  $X \sim N(10, 16)$ . Να υπολογιστούν οι ακόλουθες πιθανότητες, εφράζοντας την απάντησή σας βάσει των τιμών της Αθροιστικής Συνάρτησης Κατανομής της Τυπικής Κανονικής Κατανομής ( $\Phi(\cdot)$ ):

(α)  $P(X \geq 15)$ .

(β)  $P(X \leq 5)$ .

(γ)  $P(X^2 \geq 400)$ .

**Λύση**

(α) Για τον υπολογισμό της ζητούμενης πιθανότητας, κάνοντας χρήση των ιδιοτήτων της Αθροιστικής Συνάρτησης Κατανομής της Τυπικής Κανονικής Κατανομής ( $\Phi(\cdot)$ ), έχουμε:

$$P(X \geq 15) = 1 - P(X \leq 15) = 1 - P\left(\frac{X - 10}{4} \leq \frac{15 - 10}{4}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{5}{4}\right) = 1 - 0.8944 = 0.1056$$

(β)  $P(X \leq 5)$ . Για τον υπολογισμό της ζητούμενης πιθανότητας, κάνοντας χρήση των ιδιοτήτων της Αθροιστικής Συνάρτησης Κατανομής της Τυπικής Κανονικής Κατανομής ( $\Phi(\cdot)$ ), έχουμε:

$$P(X \leq 5) = P\left(\frac{X - 10}{4} \leq \frac{5 - 10}{4}\right) = \Phi\left(\frac{-5}{4}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{5}{4}\right) = 1 - 0.8944 = 0.1056$$

(γ)  $P(X^2 \geq 400)$ . Για τον υπολογισμό της ζητούμενης πιθανότητας, κάνοντας χρήση των ιδιοτήτων της Αθροιστικής Συνάρτησης Κατανομής της Τυπικής Κανονικής Κατανομής ( $\Phi(\cdot)$ ), έχουμε:

$$\begin{aligned} P(X^2 \geq 400) &= P(X \geq 20 \cup X \leq -20) = P(X \geq 20) + P(X \leq -20) \\ &= 1 - P\left(\frac{X - 10}{4} \leq \frac{20 - 10}{4}\right) + P\left(\frac{X - 10}{4} \leq \frac{-20 - 10}{4}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{10}{4}\right) + \Phi\left(\frac{-30}{4}\right) \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{10}{4}\right) + 1 - \Phi\left(\frac{30}{4}\right) = 2 - \Phi\left(\frac{10}{4}\right) - \Phi\left(\frac{30}{4}\right) = 2 - 0.9938 - 1 = 0.0062 \end{aligned}$$

**Άσκηση 6**

Έστω ότι το λεωφορείο 11 (προς ΠΑΓΝΗ-ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ) φτάνει σε μία συγκεκριμένη στάση κάθε 10 λεπτά, ξεκινώντας τα δρομολόγιά του στις 06:00. Αν ένας επιβάτης φθάνει στον σταθμό σε χρόνο ο οποίος κατανέμεται ομοιόμορφα στο χρονικό διάστημα  $[07:20, 07:40]$ , να υπολογιστούν οι πιθανότητες να περιμένει το λεωφορείο:

(α) Το πολύ 4 λεπτά.

(β) Τουλάχιστον 7 λεπτά.

**Λύση**

Έστω  $X$  συνεχής Τ.Μ., η οποία αντιπροσωπεύει τον χρόνο άφιξης του επιβάτη στην στάση, και μετράται σε λεπτά ξεκινώντας από την χρονική στιγμή 07:20. Με βάση τα δεδομένα της άσκησης, η  $X$  θα ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα  $[0, 20]$ , με Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας (ΣΠΠ) (PDF) που δίνεται από τον παρακάτω τύπο:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{20} & 0 \leq x \leq 20 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

- (α) Για να περιμένει ο επιβάτης το πολύ 4 λεπτά, σημαίνει πως φτάνει στην στάση είτε στο χρονικό διάστημα  $[07:26, 07:30]$  είτε στο χρονικό διάστημα  $[07:36, 07:40]$ . Άρα, η ζητούμενη πιθανότητα θα είναι:

$$\begin{aligned} P(6 \leq X \leq 10) + P(16 \leq X \leq 20) &= \int_6^{10} f_X(x)dx + \int_{16}^{20} f_X(x)dx = \int_6^{10} \frac{1}{20}dx + \int_{16}^{20} \frac{1}{20}dx \\ &= \frac{1}{20} \left[ x \right]_6^{10} + \frac{1}{20} \left[ x \right]_{16}^{20} = \frac{1}{20}(10 - 6) + \frac{1}{20}(20 - 16) = \frac{1}{20}(4) + \frac{1}{20}(4) = \frac{8}{20} = \frac{2}{5} = 0.4 \end{aligned}$$

- (β) Για να περιμένει ο επιβάτης τουλάχιστον 7 λεπτά, σημαίνει πως φθάνει στην στάση είτε στο χρονικό διάστημα  $[07:20, 07:23]$  είτε στο χρονικό διάστημα  $[07:30, 07:33]$ . Άρα, η ζητούμενη πιθανότητα θα είναι:

$$\begin{aligned} P(0 \leq X \leq 3) + P(10 \leq X \leq 13) &= \int_0^3 f_X(x)dx + \int_{10}^{13} f_X(x)dx = \int_0^3 \frac{1}{20}dx + \int_{10}^{13} \frac{1}{20}dx \\ &= \frac{1}{20} \left[ x \right]_0^3 + \frac{1}{20} \left[ x \right]_{10}^{13} = \frac{1}{20}(3 - 0) + \frac{1}{20}(13 - 10) = \frac{1}{20}(3) + \frac{1}{20}(3) = \frac{6}{20} = \frac{3}{10} = 0.3 \end{aligned}$$

### Άσκηση 7

Θεωρούμε τις Τ.Μ.  $X$  και  $Y$  με από κοινού Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας που δίνεται από τον εξής τύπο:

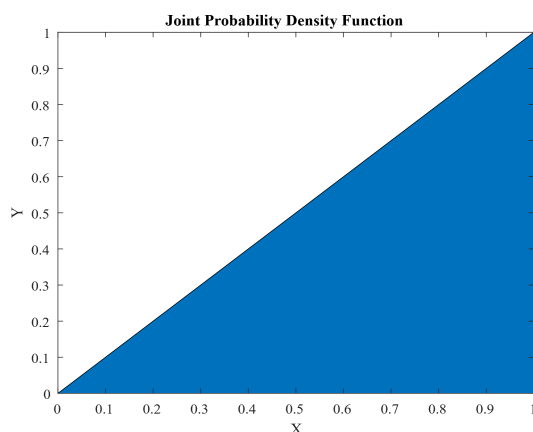
$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} kxy, & 0 \leq y \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

όπου  $k$  σταθερά με  $k \in \mathbb{R}$ . Να υπολογιστούν:

- (α) Η σταθερά  $k$ .  
 (β) Οι οριακές Συναρτήσεις Πυκνότητας Πιθανότητας  $f_X(x)$  και  $f_Y(y)$ .  
 (γ) Οι δεσμευμένες κατανομές  $f_{Y|X}(y|x)$  και  $f_{X|Y}(x|y)$ .

### Λύση

Σχεδιάζοντας τα επιτρεπτά πεδία τιμών των Τ.Μ.  $X, Y$ , λαμβάνουμε την γραφική παράσταση του συνόλου τιμών της από κοινού Συνάρτησης Πυκνότητας Πιθανότητας (περιορισμένη στο διάστημα  $[0, 1] \times [0, 1]$ ) που φαίνεται στο Σχήμα 3.



Σχήμα 3: Πεδίο Τιμών της Από Κοινού Συνάρτησης Πυκνότητας Πιθανότητας  $f_{X,Y}(x,y)$ .



- (α) Για να αποτελεί η  $f_{X,Y}(x,y)$  μία έγκυρη από κοινού Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας, θα πρέπει να ικανοποιεί την Συνθήκη Κανονικοποίησης:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y) dy dx = 1$$

Όμως, είναι:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y) dy dx &= \int_{x=0}^1 \left( \int_{y=0}^x kxy dy \right) dx = \int_{x=0}^1 kx \left( \int_{y=0}^x y dy \right) dx = \int_{x=0}^1 kx \left[ \frac{y^2}{2} \right]_0^x dx \\ &= \int_{x=0}^1 kx \left( \frac{x^2}{2} - 0 \right) dx = \int_{x=0}^1 \frac{k}{2} x^3 dx = \frac{k}{2} \int_{x=0}^1 x^3 dx = \frac{k}{2} \left[ \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{k}{2} \left( \frac{1}{4} - 0 \right) = \frac{k}{8} \end{aligned}$$

Συνεπώς, προκύπτει  $\frac{k}{8} = 1 \Rightarrow k = 8$ .

Αρα, τελικά, η από κοινού Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας,  $f_{X,Y}(x,y)$ , θα δίνεται από τον τύπο:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 8xy, & 0 \leq y \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

- (β) Με γνωστή την από κοινού Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας των  $X, Y$ , οι Συναρτήσεις Πυκνότητας Πιθανότητας  $f_X(x)$ ,  $f_Y(y)$  δίνονται από τους εξής τύπους:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y) dy \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y) dx$$

Για  $0 \leq x \leq 1$ , έχουμε ότι:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y) dy = \int_{-\infty}^0 0 dy + \int_0^x 8xy dy + \int_x^{+\infty} 0 dy = 8x \int_0^x y dy = 8x \left[ \frac{y^2}{2} \right]_0^x = 4x^3$$

Άρα, τελικά, η Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας,  $f_X(x)$ , θα δίνεται από τον τύπο:

$$f_X(x) = \begin{cases} 4x^3 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

Για  $0 \leq y \leq 1$ , έχουμε ότι:

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y) dx = \int_{-\infty}^y 0 dx + \int_y^1 8xy dx + \int_1^{+\infty} 0 dx = 8y \int_y^1 x dx = 8y \left[ \frac{x^2}{2} \right]_y^1 = 4y(1-y^2)$$

Άρα, τελικά, η Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας,  $f_Y(y)$ , θα δίνεται από τον τύπο:

$$f_Y(y) = \begin{cases} 4y(1-y^2) & 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

- (γ) Γνωρίζουμε από τη θεωρία ότι:

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_{Y|X}(y|x) \quad f_{X,Y}(x,y) = f_Y(y)f_{X|Y}(x|y)$$

Για  $0 \leq y \leq x$ , έχουμε ότι:

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{8xy}{4x^3} = \frac{2y}{x^2}$$

Άρα, τελικά, η  $f_{Y|X}(y|x)$ , θα δίνεται από τον τύπο:

$$f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} \frac{2}{x^2}y & 0 \leq y \leq x \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

Για  $y \leq x \leq 1$ , έχουμε ότι:

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{8xy}{4y(1-y^2)} = \frac{2x}{1-y^2}$$

Άρα, τελικά, η  $f_{X|Y}(x|y)$ , θα δίνεται από τον τύπο:

$$f_{X|Y}(x|y) = \begin{cases} \frac{2}{1-y^2}x & y \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$