

**HY-217: Πιθανότητες-Χειμερινό Εξάμηνο 2021**  
**Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης**

Φροντιστήριο 4

**Άσκηση 1**

Το ένα δέκατο των εργαλείων που κατασκευάζει μία εταιρεία είναι ελαττωματικά. Υπολογίστε την πιθανότητα, σε ένα τυχαίο δείγμα 10 εργαλείων να βγουν 2 ακριβώς εργαλεία ελαττωματικά:

- (α) Χρησιμοποιώντας τη Διωνυμική Κατανομή.
- (β) Προσεγγίζοντας τη Διωνυμική Κατανομή με μία Κατανομή *Poisson*.

**Λύση**

- (α) Σύμφωνα με την εκφώνηση της άσκησης, η πιθανότητα επιλογής ελαττωματικού εργαλείου είναι  $p = 0.1$ .

Εαν η τυχαία μεταβλητή  $X$  παριστάνει το πλήθος των ελαττωματικών εργαλείων σε δείγμα 10 εργαλείων, τότε η Διωνυμική Κατανομή δίνει:

$$P(X = 2) = \binom{10}{2} \cdot 0.1^2 \cdot 0.9^8 = 45 \cdot 0.01 \cdot 0.43 \approx \boxed{0.194}$$

- (β) Η Κατανομή *Poisson* που προσεγγίζει τη Διωνυμική αυτή Κατανομή έχει:

$$\lambda = n \cdot p = 10 \cdot 0.1 = 1$$

Άρα, στην περίπτωση αυτή, έχουμε:

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^x}{x!} \quad \text{και} \quad P(X = 2) = \frac{e^{-1} \cdot 1^2}{2!} \approx \boxed{0.184}$$

**Παρατήρηση:** Η προσέγγιση κατά *Poisson*, γενικά αποδίδει καλύτερα αποτελέσματα στις περιπτώσεις που  $n \rightarrow \infty$  και  $p \rightarrow 0$ .

**Άσκηση 2**

Η πιθανότητα να αντιδράσει άσχημα ένας ασθενής σε μία ένεση είναι 0.001. Εάν η ένεση γίνει σε 2000 ασθενείς, υπολογίστε την πιθανότητα να αντιδράσουν άσχημα:

- (α) Ακριβώς 3 ασθενείς.
- (β) Περισσότεροι από 2 ασθενείς.

**Λύση**

Έστω τυχαία μεταβλητή  $X$  που παριστάνει το πλήθος των ασθενών που θα αντιδράσουν άσχημα. Η  $X$  έχει Διωνυμική Κατανομή, αλλά, επειδή η "άσχημη αντίδραση" είναι σπάνιο γεγονός (συνδυαστικά με το γεγονός ότι έχουμε ένα αρκούντως μεγάλο δείγμα ασθενών), μπορούμε να δεχθούμε ότι ακολουθεί κατανομή *Poisson*. Οπότε, έχουμε:

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^x}{x!}, \quad \text{όπου } \lambda = n \cdot p = 2000 \cdot 0.001 = 2$$

Με βάση την προσέγγιση αυτή, έχουμε:

(α)

$$P(X = 3) = \frac{e^{-2} \cdot 2^3}{3!} \approx \boxed{0.18}$$

(β)

$$\begin{aligned} P(X > 2) &= 1 - [P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)] = 1 - \left( \frac{e^{-2} \cdot 2^0}{0!} + \frac{e^{-2} \cdot 2^1}{1!} + \frac{e^{-2} \cdot 2^2}{2!} \right) \\ &= 1 - \left( \frac{e^{-2} \cdot 1}{1} + \frac{e^{-2} \cdot 2}{1} + \frac{e^{-2} \cdot 4}{2} \right) = 1 - 5e^{-2} \approx \boxed{0.323} \end{aligned}$$

**Παρατήρηση:** Ένας ακριβής υπολογισμός των ίδιων πιθανοτήτων με τη χρήση της Διωνυμικής Κατανομής θα περιλάμβανε πολύ περισσότερο κόπο, δεδομένων των πολύ μεγάλων υπολογισμών που θα προέκυπταν (π.χ. 2000! κτλ.).

### Άσκηση 3

Ένας αφηρημένος λογιστής έχει στην τσέπη του  $n$  κλειδιά, από τα οποία μόνο 1 (δε θυμάται ποιο...) ταιριάζει στην πόρτα του γραφείου του. Επιλέγει τυχαία ένα κλειδί και το δοκιμάζει στην κλειδαριά. Αν δεν ταιριάζει, επιλέγει ένα άλλο και ξαναπροσπαθεί μέχρις ότου επιλέξει το σωστό κλειδί και ξεκλειδώσει την πόρτα του. Ορίζουμε την τυχαία μεταβλητή  $X$  ως το πλήθος των κλειδιών που δοκιμάζει (συμπεριλαμβανομένου και του τελευταίου με το οποίο ανοίγει τελικά την πόρτα). Να υπολογιστεί η Συνάρτηση Πιθανότητας (Μάζας)  $p_X(k)$ , αν για κάθε κλειδί το οποίο δεν ανοίγει την πόρτα, το τοποθετεί ξανά πίσω στην τσέπη του.

### Λύση

Όταν ο λογιστής βάζει πίσω στην τσέπη του το λάθος κλειδί, δηλαδή επιλέγει με επανάθεση, έχουμε ουσιαστικά μία ακολουθία *Ανεξάρτητων Δοκιμών Bernoulli*, με πιθανότητα επιτυχίας  $p = \frac{1}{n}$  και αποτυχίας  $1 - p = 1 - \frac{1}{n}$ .

Συνεπώς, η τυχαία μεταβλητή  $X$  ακολουθεί Γεωμετρική Κατανομή, και κατ' επέκταση η ζητούμενη Συνάρτηση Πιθανότητας (Μάζας) θα είναι:

$$p_X(k) = (1 - p)^{k-1} \cdot p = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{n}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

### Άσκηση 4

Σε μία τηλεφωνική συνομιλία, κατά τη διάρκεια κάθε λεπτού υπάρχει μία πιθανότητα 0.05 να πέσει η γραμμή. Υποθέτουμε πως η συμπεριφορά της τηλεφωνικής γραμμής από λεπτό σε λεπτό είναι ανεξάρτητη.

(α) Ποια είναι η πιθανότητα να πέσει η γραμμή για 1<sup>η</sup> φορά κατά το 5<sup>ο</sup> λεπτό της συνομιλίας;

(β) Ποια είναι η πιθανότητα να μην έχει πέσει η γραμμή κατά τα πρώτα 10 λεπτά της συνομιλίας;

### Λύση

Έστω  $X$  τυχαία μεταβλητή που δείχνει σε ποιο λεπτό της συνομιλίας έπεσε η γραμμή.

Η  $X$  ακολουθεί τη Γεωμετρική Κατανομή με παράμετρο επιτυχίας  $p = 0.05$ , αφού κάθε λεπτό αποτελεί *Ανεξάρτητη Δοκιμή Bernoulli*, με πιθανότητα επιτυχίας  $p = 0.05$ .

**Παρατήρηση:** Σε αυτή τη *Δοκιμή Bernoulli* που μελετάμε, έχουμε θεωρήσει ως επιτυχία την περίπτωση που η γραμμή πέφτει.

Με βάση τα παραπάνω, έχουμε:

(α) Η ζητούμενη πιθανότητα θα είναι:

$$P(X = 5) = (1 - 0.05)^4 \cdot 0.05 \approx 0.041$$

(β) Η γραμμή δεν θα πέσει τα πρώτα 10 λεπτά, αν και μόνο αν έχουμε 10 αποτυχίες στη σειρά (δηλαδή, για 10 συνεχόμενα λεπτά η γραμμή διατηρείται ανέπαφη). Έτσι, η ζητούμενη πιθανότητα θα είναι:

$$P(X > 10) = (1 - 0.05)^{10} \approx 0.599$$

### Άσκηση 5

Η από κοινού συνάρτηση πιθανότητας των τ.μ.  $X, Y$  δίνεται από τον παρακάτω πίνακα:

|         |         |         |         |
|---------|---------|---------|---------|
| $y = 3$ | $c$     | $c$     | $2c$    |
| $y = 2$ | $2c$    | $0$     | $4c$    |
| $y = 1$ | $3c$    | $c$     | $6c$    |
|         | $x = 1$ | $x = 2$ | $x = 3$ |

(α) Βρείτε την τιμή της σταθεράς  $c$ .

(β) Βρείτε την  $P(Y < X)$ .

(γ) Βρείτε την  $P(Y > X)$ .

(δ) Βρείτε την  $P(Y = X)$ .

(ε) Βρείτε την  $P(Y = 3)$ .

(στ) Βρείτε τις περιθωριακές συναρτήσεις πιθανότητας  $p_X(x)$  και  $p_Y(y)$ .

(ζ) Βρείτε τις μέσες τιμές  $E[X]$ ,  $E[Y]$ .

(η) Βρείτε τις διασπορές  $var(X)$ ,  $var(Y)$ .

(θ) Υπολογίστε τη δεσμευμένη πιθανότητα  $P(X = Y \mid X \leq Y)$ .

### Λύση

(α) Ισχύει:

$$\sum_x \sum_y p_{X,Y}(x, y) = 1$$

Έτσι, προσθέτουμε όλες τις τιμές του πίνακα και θέτουμε το άθροισμα ίσο με 1.

$$20c = 1 \rightarrow c = \frac{1}{20}.$$

(β)  $P(Y < X) = c + 6c + 4c = 11c = 11/20$ .

|         |         |         |         |
|---------|---------|---------|---------|
| $y = 3$ | $c$     | $c$     | $2c$    |
| $y = 2$ | $2c$    | $0$     | $4c$    |
| $y = 1$ | $3c$    | $c$     | $6c$    |
|         | $x = 1$ | $x = 2$ | $x = 3$ |

(γ)  $P(Y > X) = 2c + c + c = 4c = 1/5.$

|         |         |         |         |
|---------|---------|---------|---------|
| $y = 3$ | $c$     | $c$     | $2c$    |
| $y = 2$ | $2c$    | $0$     | $4c$    |
| $y = 1$ | $3c$    | $c$     | $6c$    |
|         | $x = 1$ | $x = 2$ | $x = 3$ |

(δ)  $P(Y = X) = 1 - P(Y < X) - P(Y > X) = 1 - \frac{11}{20} - \frac{1}{5} = 1/4$

(ε)  $P(Y = 3) = c + c + 2c = 4c = 1/5.$

|         |         |         |         |
|---------|---------|---------|---------|
| $y = 3$ | $c$     | $c$     | $2c$    |
| $y = 2$ | $2c$    | $0$     | $4c$    |
| $y = 1$ | $3c$    | $c$     | $6c$    |
|         | $x = 1$ | $x = 2$ | $x = 3$ |

(στ)

$$p_X(x) = \begin{cases} 3/10, & x = 1 \\ 1/10, & x = 2 \\ 3/5, & x = 3 \end{cases} \quad p_Y(y) = \begin{cases} 1/2, & y = 1 \\ 3/10, & y = 2 \\ 1/5, & y = 3 \end{cases}$$

(ζ)

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[X] &= \frac{3}{10} \cdot 1 + \frac{1}{10} \cdot 2 + \frac{3}{5} \cdot 3 = 2.3 \\ \mathbf{E}[Y] &= \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{3}{10} \cdot 2 + \frac{1}{5} \cdot 3 = 1.7 \end{aligned}$$

(η)

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[X^2] &= \frac{3}{10} \cdot 1 + \frac{1}{10} \cdot 4 + \frac{3}{5} \cdot 9 = 6.1 \\ \mathbf{E}[Y^2] &= \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{3}{10} \cdot 4 + \frac{1}{5} \cdot 9 = 3.5 \\ \text{var}(X) &= \mathbf{E}[X^2] - (\mathbf{E}[X])^2 = 6.1 - 2.3^2 = 0.81 \\ \text{var}(Y) &= \mathbf{E}[Y^2] - (\mathbf{E}[Y])^2 = 3.5 - 1.7^2 = 0.61 \end{aligned}$$

(θ) Για την πιθανότητα  $P(X = Y | X \leq Y)$  έχω:

$$\begin{aligned} P(X = Y | X \leq Y) &= \frac{P(X = Y \cap X \leq Y)}{P(X \leq Y)} \\ &= \frac{p_{X,Y}(1,1) + p_{X,Y}(2,2) + p_{X,Y}(3,3)}{p_{X,Y}(1,2) + p_{X,Y}(1,3) + p_{X,Y}(2,3) + p_{X,Y}(1,1) + p_{X,Y}(2,2) + p_{X,Y}(3,3)} \\ &= \frac{(3+0+2)/20}{(2+1+1+3+0+2)/20} = \frac{5}{9} \end{aligned}$$

**Άσκηση 6**

Έχετε στα χέρια σας ένα δίκαιο 6-εδρο ζάρι και ένα δίκαιο κέρμα. Ρίχνετε πρώτα το ζάρι και έστω  $X$  ο αριθμός που έρχεται. Στη συνέχεια, ρίχνετε το κέρμα  $X$  φορές και έστω ότι εμφανίζονται  $Y$  κεφαλές.

- (α) Ποια είναι η δεσμευμένη συνάρτηση πιθανότητας  $p_{Y/X}(y/x)$ ; Δώστε την πλήρη μαθηματική περιγραφή της.
- (β) Υπολογίστε την πιθανότητα  $P(Y = 3 / X = 6)$ .
- (γ) Ποια είναι η Συνάρτηση Πιθανότητας της τ.μ.  $X$ ;
- (δ) Υπολογίστε την από κοινού Σ.Π.  $p_{X,Y}(x, y)$  των τ.μ.  $X$  και  $Y$ .

**Λύση**

- (α) Δεδομένου ότι φέρνουμε  $X = x$  στη ρίψη του 6-εδρου δίκαιου ζαριού, ρίχνουμε το κέρμα  $x$  φορές και το πλήθος  $Y$  των κεφαλών που εμφανίζονται ακολουθεί Διωνυμική κατανομή με παραμέτρους  $n = x$  και  $p = \frac{1}{2}$ :

$$Y/\{X = x\} \sim \Delta(x, \frac{1}{2})$$

Συνεπώς,

$$P_{Y/X}(y/x) = \binom{x}{y} \left(\frac{1}{2}\right)^y \left(\frac{1}{2}\right)^{x-y} = \binom{x}{y} \left(\frac{1}{2}\right)^x; \quad 1 \leq x \leq 6, \quad 0 \leq y \leq x.$$

$$(β) \quad P(Y = 3 / X = 6) = P_{Y/X}(y = 3 / x = 6) = \binom{6}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{20}{64} = 0.3125.$$

- (γ) Προφανώς, η  $X$  είναι διακριτή ομοιόμορφη τ.μ. στο πεδίο τιμών  $x = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}, & x = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases}$$

- (δ) Γνωρίζουμε ότι η δεσμευμένη Σ.Π. συχνά είναι χρήσιμη για τον υπολογισμό της από κοινού Σ.Π. μέσω του Πολλαπλασιαστικού νόμου:

$$\begin{aligned} p_{X,Y}(x, y) &= p_Y(y) \cdot p_{X/Y}(x/y) \\ &= p_X(x) \cdot p_{Y/X}(y/x) \end{aligned}$$

Συνεπώς, η από κοινού Σ.Π. των  $X$  και  $Y$  είναι:

$$\begin{aligned} p_{X,Y}(x, y) &= p_X(x) \cdot p_{Y/X}(y/x) \\ &= \frac{1}{6} \binom{x}{y} \left(\frac{1}{2}\right)^x; \quad 1 \leq x \leq 6, \quad 0 \leq y \leq x. \end{aligned}$$

**Άσκηση 7**

Ο Χρήστος αφιερώνει  $K$  ώρες στην αγορά βιβλίων, όπου  $K$  μια διακριτή τ.μ με ισοπίθανες τιμές 1, 2, 3 και 4. Ο αριθμός  $N$  των βιβλίων που αγοράζει ο Χρήστος είναι και αυτός μια διακριτή τ.μ που εξαρτάται από το πόση ώρα φωνίζει. Άρα:

$$p_{N/K}(n/k) = \frac{1}{k}, \quad \text{για } n = 1, \dots, k.$$

- (α) Υπολογίστε την από κοινού σ.π. των  $K$  και  $N$ .  
 (β) Υπολογίστε την περιθωριακή σ.π. της  $N$ .  
 (γ) Υπολογίστε τη δεσμευμένη σ.π. της  $K$  δεδομένου του γεγονότος  $N = 2$ .  
 (δ) Μας δίδεται ότι ο Χρήστος αγόρασε τουλάχιστον 2 αλλά όχι περισσότερα από 3 βιβλία. Υπολογίστε τη δεσμευμένη μέση τιμή και διασπορά της  $K$ , δεδομένης της παραπάνω πληροφορίας.

**Λύση**

(α) Χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι  $p_{N,K}(n, k) = p_{N|K}(n|k)p_K(k)$  για να υπολογίσουμε την από κοινού σ.π.π. :

$$p_{N,K}(n, k) = \begin{cases} 1/(4k), & k = 1, 2, 3, 4 \text{ και } n = 1, \dots, k; \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

(β) Η σ.π.π  $p_N(n)$  δίνεται από τον ακόλουθο τύπο :

$$p_N(n) = \sum_k p_{N,K}(n, k) = \sum_{k=n}^4 \frac{1}{4k}$$

δηλαδή :

$$p_N(n) = \begin{cases} 25/48, & n = 1 \\ 13/48, & n = 2 \\ 7/48, & n = 3 \\ 3/48, & n = 4 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

(γ) Η δεσμευμένη σ.π.π είναι :

$$p_{K|N}(k|2) = \frac{p_{N,K}(2, k)}{p_N(2)} = \begin{cases} 6/13, & k = 2; \\ 4/13, & k = 3; \\ 3/13, & k = 4; \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

(δ) Έστω  $A$  το γεγονός ότι  $2 \leq N \leq 3$ . Πρώτα υπολογίζουμε την δεσμευμένη σ.π.π του  $K$  δεδομένου του  $A$ :

$$p_{K|A}(k) = \frac{P(K = k, A)}{P(A)}$$

$$P(A) = p_N(2) + p_N(3) = 5/12$$

$$P(K = k, A) = \begin{cases} 1/8, & k = 2; \\ 1/12 + 1/12, & k = 3; \\ 1/16 + 1/16, & k = 4; \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

$$p_{K|A}(k) = \begin{cases} 3/10, & k = 2; \\ 2/5, & k = 3; \\ 3/10, & k = 4; \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Επειδή η δεσμευμένη σ.π.π του  $K$  δεδομένου του  $A$  είναι συμμετρική γύρω από το  $k = 3$ , γνωρίζουμε ότι  $E[K|A] = 3$ . Μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε την δεσμευμένη διασπορά του  $K$  δεδομένου του  $A$ :

$$var(K|A) = E[(K - E[K|A])^2|A] = \frac{3}{10}(2 - 3)^2 + \frac{2}{5}(3 - 3)^2 + \frac{3}{10}(4 - 3)^2 = \frac{3}{5}$$