

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

HY-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2021-2022
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Φροντιστήριο 3

Άσκηση 1

- (A) Πόσες πινακίδες αυτοκινήτων με 3 γράμματα του ελληνικού αλφαβήτου και 4 ψηφία μπορούν να σχηματιστούν; Πόσες από αυτές έχουν **τουλάχιστον** 2 διαφορετικά γράμματα;
- (B) Τραβάμε χαρτιά από μια τράπουλα 52 φύλλων, με επαναθέσεις. Με πόσους τρόπους είναι δυνατόν να τραβηχθούν 6 χαρτιά, έτσι ώστε στο 6ο χαρτί να εμφανίζεται η πρώτη επανάληψη;
- (Γ) Πόσες σημαίες με τρεις ρίγες μπορούν να σχηματιστούν εάν γνωρίζουμε ότι η μεσαία λωρίδα θα πρέπει να έχει διαφορετικό χρώμα από τις άλλες δύο και εάν τα πιθανά χρώματα είναι: Κόκκινο, Μπλε, Κίτρινο, Πράσινο, Μαύρο και Άσπρο;
- (Δ) Πόσοι τριψήφιοι αριθμοί abc , με $a, b, c \in \{1, 2, 3, \dots, 9\}$ μπορούν να σχηματιστούν με την ιδιότητα $a \leq b \leq c$;
- (E) Με πόσους τρόπους μπορούμε να μοιράσουμε 5 δώρα σε 15 άτομα, αν κανένα άτομο δε μπορεί να πάρει πάνω από ένα δώρο;
- (ΣΤ) Με πόσους τρόπους μπορούν να τοποθετηθούν 7 από 15 συγκεκριμένους ανθρώπους σε έναν κύκλο;

Λύση:

- (A) Για να το βρούμε αρκεί να απαριθμήσουμε πόσες λέξεις με 3 γράμματα και πόσους 4ψήφιους αριθμούς μπορούμε να σχηματίσουμε. Μπορούμε να σκεφτούμε, αρχικά, ότι υπάρχουν 3 κενές θέσεις για γράμματα και 4 κενές θέσεις για ψηφία: _ _ _ _ _
Τα πιθανά γράμματα είναι 24 και τα πιθανά ψηφία είναι 10. Επομένως, για την πρώτη θέση στα γράμματα έχουμε 24 πιθανά γράμματα, για την 2η θέση έχουμε 24 πιθανά γράμματα και για την τρίτη θέση έχουμε 24 πιθανά γράμματα. Ομοίως, και για τα ψηφία. Δηλαδή:

$$24 \cdot 24 \cdot 24 = 24^3 \text{ συνδυασμοί γραμμάτων}$$

και

$$10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^4 \text{ συνδυασμοί ψηφίων}$$

Άρα, όλοι οι πιθανοί συνδυασμοί είναι:

$$24^3 \cdot 10^4$$

Εάν, τώρα, θέλουμε να έχουμε **τουλάχιστον** 2 διαφορετικά γράμματα, θα σκεφτούμε ως εξής:

Θα βρούμε όλες τις πιθανές πινακίδες με ακριβώς 2 διαφορετικά γράμματα και ακριβώς 3 διαφορετικά γράμματα, δηλαδή τις πινακίδες με τουλάχιστον 2 διαφορετικά γράμματα.

- Ακριβώς 2 διαφορετικά: Παίρνω τις διατάξεις 24 γραμμάτων ανά 2 και το τρίτο γράμμα πρέπει υποχρεωτικά να είναι ένα από τα προηγούμενα 2 (οπότε 2 στο πλήθος ενδεχόμενα)

$$P(24, 2) \cdot 2 = \frac{24!}{22!} \cdot 2 = 24 \cdot 23 \cdot 2$$

- Ακριβώς 3 διαφορετικά: Διατάξεις 3 γραμμάτων από το σύνολο των 24 πιθανών

$$P(24, 3) = \frac{24!}{21!} = 24 \cdot 23 \cdot 22$$

Αθροίζοντας το πλήθος των παραπάνω ενδεχομένων, έχουμε

$$24 \cdot 23 \cdot 2 + 24 \cdot 23 \cdot 22 = 24^2 \cdot 23$$

στο πλήθος διαφορετικές διατάξεις των 3 γραμμάτων με τουλάχιστον 2 διαφορετικά γράμματα.

Για να υπολογίσουμε το αντίστοιχο πλήθος πινακίδων αρκεί να πολλαπλασιάσουμε και με τις πιθανές διατάξεις 4 ψηφίων. Δηλαδή έχουμε συνολικά:

$$24^2 \cdot 23 \cdot 10^4$$

πιθανές πινακίδες.

- (B) Για να έχουμε την πρώτη επανάληψη στο 6ο τράβηγμα, σημαίνει ότι τα πρώτα 5 χαρτιά μπορεί να είναι οποιαδήποτε (αλλά διαφορετικά μεταξύ τους). Αυτό μπορεί να γίνει με $\binom{52}{5}$ διαφορετικούς τρόπους. Το 6ο φύλλο πρέπει να είναι ένα από αυτά που έχουν ήδη προηγηθεί, άρα υπάρχουν 5 τρόποι να γίνει αυτό (ή αλλιώς $\binom{5}{1}$). Επομένως, συνολικά οι πιθανοί τρόποι να γίνει αυτό είναι:

$$\binom{52}{5} \cdot \binom{5}{1} = \binom{52}{5} \cdot 5 = \frac{52!}{5! \cdot 47!} \cdot 5 = \frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48}{4 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48}{24}$$

- (Γ) Υπάρχουν 6 πιθανά χρώματα για την πρώτη λωρίδα, έπειτα 5 για την δεύτερη (αφού δεν πρέπει να είναι ίδιο χρώμα με την πρώτη), και, τέλος, 5 πιθανά χρώματα για την τελευταία λωρίδα (οποιοδήποτε χρώμα εκτός από αυτό της μεσαίας λωρίδας). Άρα, υπάρχουν $6 \cdot 5 \cdot 5 = 150$ πιθανές σημαίες.
- (Δ) Αν όλα τα ψηφία είναι διαφορετικά μεταξύ τους, τότε η σειρά τους καθορίζεται από τη σχέση $a \leq b \leq c$. Άρα, υπάρχουν $\binom{9}{3} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 84$ πιθανοί αριθμοί που πληρούν τη συνθήκη. Αν $a = b$ αλλά $a \neq c$, τότε έχουμε $\binom{9}{2} = \frac{9 \cdot 8}{1 \cdot 2} = 36$ πιθανούς αριθμούς που πληρούν τη συνθήκη και ίδιο πλήθος αριθμών για $b = c$ και $a \neq b$. Τέλος, υπάρχουν 9 πιθανοί τριψήφιοι αριθμοί abc τ.ω. $a = b = c$. Οπότε, έχουμε συνολικά:

$$84 + 2 \cdot 36 + 9 = 165$$

πιθανούς διαφορετικούς αριθμούς που πληρούν την δοσμένη συνθήκη.

- (E) Στην εκφώνηση δε διευκρινίζεται αν τα δώρα είναι διαφορετικά. Οπότε, έχουμε δύο πιθανές περιπτώσεις.

- Εάν υποθέσουμε ότι τα δώρα είναι διαφορετικά:

το πρώτο δώρο έχει 15 πιθανούς παραλήπτες, το 2ο 14, το 3ο 13 το 4ο 12 και το 5ο 11. Επομένως, μπορούμε να μοιράσουμε 5 δώρα σε 15 άτομα με $15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 = 360360$ ή, εναλλακτικά, θέλουμε να υπολογίσουμε τις μεταθέσεις 5 αντικειμένων σε 15 πιθανές θέσεις: $\frac{15!}{(15-5)!} = \frac{15!}{10!} = 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 = 360360$.

- Εάν υποθέσουμε ότι τα δώρα είναι ίδια μεταξύ τους αρκεί να υπολογίσουμε με πόσους τρόπους μπορούμε να πάρουμε 5 ανθρώπους από ένα σύνολο 15 ανθρώπων (οι 5 εκείνοι θα είναι αυτοί που θα πάρουν ένα από τα 5 όμοια δώρα). Άρα, έχουμε $C(15, 5) = \frac{15!}{(15-5)!5!} = \frac{15!}{10!5!} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{360360}{120} = 3003$.

(ΣΤ) Σκεφτόμαστε, αρχικά, πώς μπορούμε να βάλουμε 7 από 15 άτομα σε μια ευθεία, με

$$15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 = \frac{15!}{8!} \text{ ή } P(15, 7) \text{ τρόπους.}$$

Έπειτα, διαιρούμε με το πλήθος των ατόμων στη διάταξη για να μην συμπεριλάβουμε πάνω από μια φορά την κάθε μετάθεση (αφού έχουμε μια κυκλική διάταξη). Άρα, το σύνολο των πιθανών μεταθέσεων είναι:

$$\frac{P(15, 7)}{7}$$

Άσκηση 2

- I. Πόσοι δυνατοί αναγραμματισμοί (και χωρίς νόημα) μπορούν να γίνουν από τα γράμματα των λέξεων:

(α) ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

(β) ΣΟΚΟΛΑΤΑ

(γ) ΜΟΥΣΤΟΚΟΥΛΟΤΡΟ

- II. Παλινδρομικές λέξεις ονομάζονται εκείνες που μπορούν να διαβαστούν το ίδιο και προς τις δύο κατευθύνσεις π.χ. ΑΝΝΑ, ΣΟΦΟΣ. Πόσες παλινδρομικές λέξεις 7 γραμμάτων (και χωρίς νόημα) μπορούν να σχηματιστούν με το ελληνικό αλφάβητο (Α-Ω);

Λύση:

- I. Ο τύπος για τους ανασυνδυασμούς n αντικειμένων εκ των οποίων υπάρχουν k_1 αντικείμενα τύπου 1, k_2 αντικείμενα τύπου 2, ..., k_m αντικείμενα τύπου m είναι:

$$\frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot k_3! \cdots k_m!}$$

Με βάση αυτόν τον τύπο, η λύση του προβλήματος έχει ως εξής:

(α) Με τη λέξη ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ ($\boxed{1: \Pi} \boxed{1: \Gamma} \boxed{1: \Theta} \boxed{1: \Lambda} \boxed{1: \text{N}} \boxed{1: \text{O}} \boxed{2: \text{T}} \boxed{1: \text{H}} \boxed{1: \text{E}} \boxed{1: \Sigma}$) μπορούμε να κάνουμε:

$$\frac{11!}{1! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!} = \frac{11!}{2!} = \frac{39.916.800}{2} = 19.958.400$$

αναγραμματισμούς.

(Η απάντηση: $\frac{11!}{2}$, χωρίς περαιτέρω υπολογισμούς, είναι αρκετή.)

(β) Με τη λέξη ΣΟΚΟΛΑΤΑ ($\boxed{1: \Sigma} \boxed{2: \text{O}} \boxed{1: \text{K}} \boxed{1: \Lambda} \boxed{2: \text{A}} \boxed{1: \text{T}}$) μπορούμε να κάνουμε:

$$\frac{8!}{1! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 2! \cdot 1!} = \frac{8!}{2! \cdot 2!} = \frac{40.320}{4} = 10.080$$

αναγραμματισμούς.

(Η απάντηση: $\frac{8!}{4}$ ή $2 \cdot 7!$, χωρίς περαιτέρω υπολογισμούς, είναι αρκετή.)

(γ) Με τη λέξη ΜΟΥΣΤΟΚΟΥΛΟΥΤΡΟ ($\boxed{1: M} \boxed{5: O} \boxed{3: Y} \boxed{1: Σ} \boxed{1: T} \boxed{1: K} \boxed{1: Λ}$
 $\boxed{1: P}$) μπορούμε να κάνουμε:

$$\frac{14!}{1! \cdot 5! \cdot 3! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!} = \frac{14!}{5! \cdot 3!} = \frac{87.178.291.200}{120 \cdot 6} = \frac{87.178.291.200}{720} = 121.080.960$$

αναγραμματισμούς.

(Η απάντηση: $\frac{14!}{5! \cdot 3!}$ ή $\frac{14!}{720}$, χωρίς περαιτέρω υπολογισμούς, είναι αρκετή.)

II. Μια παλινδρομική λέξη 7 γραμμάτων καθορίζεται από τα πρώτα 4 γράμματά της, αφού το 5ο, 6ο και 7ο γράμμα της καθορίζονται από τα πρώτα 3 (πχ ANEM $\Rightarrow$ ANE-M-ENA). Επομένως, αρκεί να βρούμε πόσες λέξεις 4 γραμμάτων μπορούμε να φτιάξουμε με το ελληνικό αλφάβητο:

$$24 \cdot 24 \cdot 24 \cdot 24 = 24^4$$

Άσκηση 3

Λέμε ότι η τ.μ. I είναι μία δείκτρια μεταβλητή για το ενδεχόμενο A αν

$$I = \begin{cases} 1, & \text{αν συμβαίνει το } A \\ 0, & \text{αν δεν συμβαίνει το } A \end{cases}$$

Να βρεθεί η $E[I]$. Εκφράστε με λόγια το αποτέλεσμα.

Λύση:

Αφού $p(1) = P(A)$ και $p(0) = 1 - P(A)$, θα έχουμε ότι:

$$E[I] = 1 \cdot P(A) + 0 \cdot (1 - P(A)) = P(A).$$

Συνεπώς, η μέση τιμή της δείκτριας τυχαίας μεταβλητής ενός ενδεχομένου A ισούται με την πιθανότητα να συμβεί το ενδεχόμενο A .

Άσκηση 4

Είκοσι διαφορετικά αυτοκίνητα παρκάρουν στον ίδιο χώρο παρκαρίσματος κάθε μέρα. Δέκα από αυτά κατασκευάζονται στη Γερμανία, ενώ τα υπόλοιπα κατασκευάζονται σε άλλες χώρες. Ο χώρος παρκαρίσματος έχει ακριβώς 20 θέσεις, όλες σε μία σειρά, έτσι ώστε τα αυτοκίνητα να παρκάρουν το ένα δίπλα στο άλλο. Ωστόσο, οι οδηγοί έχουν διαφορετικά ωράρια, και, επομένως, η θέση παρκαρίσματος για το κάθε αυτοκίνητο είναι τυχαία.

(α) Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν τα αυτοκίνητα να παρκάρουν;

(β) Ποια είναι η πιθανότητα τα αυτοκίνητα να εναλλάσσονται (δύο αυτοκίνητα κατασκευασμένα στη Γερμανία δεν παρκάρονται το ένα δίπλα στο άλλο και δύο αυτοκίνητα κατασκευασμένα σε άλλες χώρες δεν παρκάρονται το ένα δίπλα στο άλλο);

Λύση:

(α) Υπάρχουν $20!$ διαφορετικοί τρόποι να παρκάρουν τα 20 αυτοκίνητα στις 20 θέσεις, όσες όλες οι δυνατές μεταθέσεις 20 αντικειμένων.

(β) Για να υπολογίσουμε την πιθανότητα τα γερμανικά αυτοκίνητα να εναλλάσσονται με μη-γερμανικά, πρέπει να απαριθμήσουμε τα ευνοϊκά ενδεχόμενα και να διαιρέσουμε με το νούμερο που βρήκαμε στο (α). Πρώτα, διατάσσουμε τα 10 γερμανικά αυτοκίνητα. Υπάρχουν $10!$ τρόποι να γίνει αυτό. Με παρόμοιο τρόπο, διατάσσουμε και τα 10 μη-γερμανικά αυτοκίνητα. Επίσης, υπάρχουν $10!$ τρόποι να γίνει αυτό. Στη συνέχεια, για κάθε διάταξη μιας κατηγορίας παρεμβάλλουμε αυτοκίνητα από τη διάταξη της άλλης κατηγορίας. Αυτό μπορεί να γίνει με 2 διαφορετικούς τρόπους καθώς το πρώτο αυτοκίνητο

μπορεί να είναι είτε γερμανικό, είτε όχι. Συνεπώς, έχουμε συνολικά $2 \cdot 10! \cdot 10!$ ευνοϊκές διατάξεις και η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$\frac{2 \cdot 10! \cdot 10!}{20!}$$

Εναλλακτικά: Από τις 20 διαθέσιμες θέσεις πρέπει να επιλέξουμε 10 στις οποίες θα τοποθετήσουμε τα 10 γερμανικά αυτοκίνητα. Αυτό μπορεί να γίνει με $\binom{20}{10}$ τρόπους (σκεφτείτε την αναλογία με την ρίψη ενός κέρματος 20 φορές, όπου τοποθετούμε γερμανικό αυτοκίνητο στη θέση παρκαρίσματος οπότε έρχεται Κ). Σε μόνο δύο από αυτές εναλλάσσονται τα αυτοκίνητα ανάλογα με το αν είναι ή όχι γερμανικά. Επομένως, η πιθανότητα είναι και πάλι:

$$\frac{2}{\binom{20}{10}}$$

Άσκηση 5

Αν n άνθρωποι είναι παρόντες σε ένα δωμάτιο, ποια είναι η πιθανότητα δύο από αυτούς να **μην** έχουν γενέθλια την ίδια μέρα; Πόσο μεγάλο πρέπει να είναι το n ώστε η πιθανότητα αυτή να είναι μικρότερη του $1/2$;

Λύση:

Καθώς κάθε άτομο μπορεί να έχει γενέθλια οποιαδήποτε από τις 365 μέρες, υπάρχει ένα σύνολο από $(365)^n$ πιθανά αποτελέσματα. (Αγνοούμε την πιθανότητα κάποιος να έχει γεννηθεί στις 29 Φεβρουαρίου.) Υποθέτοντας πως κάθε ένα από τα αποτελέσματα είναι ισοπίθανο να πραγματοποιηθεί, βλέπουμε ότι η ζητούμενη πιθανότητα είναι $(365)(364)(363) \dots (365 - n + 1) / (365)^n$. Είναι πέρα από κάθε προσδοκία το γεγονός ότι για $n \geq 23$, αυτή η πιθανότητα είναι μικρότερη από $\frac{1}{2}$. Αυτό σημαίνει πως αν υπάρχουν 23 ή περισσότερα άτομα σε έναν χώρο, η πιθανότητα τουλάχιστον δύο από αυτούς να έχουν γενέθλια την ίδια μέρα υπερβαίνει το $\frac{1}{2}$.

Άσκηση 6

Ένα άτομο έχει 8 φίλους, 5 από τους οποίους θέλει να καλέσει σε ένα πάρτι.

- (α') Πόσες επιλογές έχει αν δύο από τους φίλους του έχουν μαλώσει και δεν γίνεται να προσκληθούν συγχρόνως;
- (β') Πόσες επιλογές έχει αν δύο από τους φίλους του είναι ζευγάρι και πρέπει να προσκληθούν συγχρόνως;

Λύση:

Tip: Σε τέτοιου είδους ασκήσεις, αρχικά, σκεφτόμαστε τις περιπτώσεις για να πραγματοποιηθεί το ζητούμενο ενδεχόμενο και, στη συνέχεια, χωρίζουμε το αρχικό σύνολο σε υποσύνολα στα οποία, τέλος, μετράμε το πλήθος των συνδυασμών.

- (α') Εδώ, έχουμε 2 περιπτώσεις. Αν δύο άτομα δε γίνεται να προσκληθούν συγχρόνως: είτε δε θα προσκληθεί κανένας από τους δύο, είτε θα προσκληθεί μόνο ένας εκ των δύο. Στη συνέχεια, το σύνολο χωρίζεται σε δύο υποσύνολα: Το ένα περιέχει τα 2 άτομα που έχουν μαλώσει και το άλλο τα εναπομείναντα 6 από τα συνολικά 8 άτομα. Στην πρώτη περίπτωση, το άτομο δε θα καλέσει κανένα από τους δύο, διαλέγοντας 0 άτομα από το σύνολο των 2 και θα καλέσει και τα 5 άτομα από το σύνολο των 6. Στη δεύτερη περίπτωση, το άτομο θα καλέσει έναν εκ των δύο, διαλέγοντας 1 άτομο από το σύνολο των 2 και θα καλέσει τα υπόλοιπα 4 άτομα από το σύνολο των 6. Οπότε, τελικά, το συνολικό πλήθος των επιλογών θα είναι:

$$C(2, 0) \cdot C(6, 5) + C(2, 1) \cdot C(6, 4) = \binom{2}{0} \cdot \binom{6}{5} + \binom{2}{1} \cdot \binom{6}{4} = \binom{6}{5} + 2 \cdot \binom{6}{4}$$

(β') Εδώ, έχουμε 2 περιπτώσεις αν δύο άτομα είναι ζευγάρι: είτε δε θα προσκληθεί κανένας από τους δύο, είτε θα προσκληθούν και οι δύο.

Στη συνέχεια, το σύνολο χωρίζεται σε δύο υποσύνολα: Το ένα περιέχει τα 2 άτομα που είναι ζευγάρι και το άλλο τα εναπομείναντα 6 από τα συνολικά 8 άτομα.

Στην πρώτη περίπτωση, το άτομο δε θα καλέσει κανένα από τους δύο, διαλέγοντας 0 άτομα από το σύνολο των 2 και θα καλέσει και τα 5 άτομα από το σύνολο των 6. Στη δεύτερη περίπτωση, το άτομο θα καλέσει και τους δύο, διαλέγοντας και τα 2 άτομα από το σύνολο των 2 και θα καλέσει τα υπόλοιπα 3 άτομα από το σύνολο των 6.

Οπότε, τελικά, το συνολικό πλήθος των επιλογών θα είναι:

$$C(2, 0) \cdot C(6, 5) + C(2, 2) \cdot C(6, 3) = \binom{2}{0} \cdot \binom{6}{5} + \binom{2}{2} \cdot \binom{6}{3} = \binom{6}{5} + \binom{6}{3}$$

Άσκηση 7

Μια τράπουλα που αποτελείται από 52 χαρτιά μοιράζεται σε τέσσερις παίκτες.

(α') Βρείτε την πιθανότητα ο πρώτος παίκτης να πάρει 13 σπαθιά.

(β') Βρείτε την πιθανότητα κάποιος παίκτης να πάρει 13 σπαθιά.

(γ') Θεωρήστε τα παρακάτω γεγονότα:

(i) Ο πρώτος παίκτης παίρνει και τα 13 σπαθιά.

(ii) Ο πρώτος παίκτης παίρνει τον Ρήγα κούπα.

Είναι τα γεγονότα αυτά ανεξάρτητα; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

(δ') Θεωρήστε τα παρακάτω γεγονότα:

(i) Τα φύλλα του πρώτου παίκτη έχουν όλα το ίδιο σχήμα.

(ii) Ο πρώτος παίκτης παίρνει τον Ρήγα κούπα.

Είναι τα γεγονότα αυτά ανεξάρτητα; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

Λύση:

(α') Το πλήθος των πιθανών συνδυασμών/χεριών των 52 φύλλων ανά 13 που μοιράζονται στον πρώτο παίκτη είναι $\binom{52}{13}$. Μονάχα ένα από αυτά τα χέρια αποτελείται από 13 σπαθιά μόνο, οπότε η ζητούμενη πιθανότητα είναι :

$$\frac{1}{\binom{52}{13}}$$

(β') Ορίζουμε 4 γεγονότα:

$A = \{\text{Ο παίκτης 1 παίρνει 13 σπαθιά}\}$

$B = \{\text{Ο παίκτης 2 παίρνει 13 σπαθιά}\}$

$\Gamma = \{\text{Ο παίκτης 3 παίρνει 13 σπαθιά}\}$

$\Delta = \{\text{Ο παίκτης 4 παίρνει 13 σπαθιά}\}$

Τα τέσσερα γεγονότα, A, B, Γ, Δ είναι ξένα μεταξύ τους, αφού αν κάποιος πάρει όλα τα σπαθιά κανένας άλλος δε μπορεί να τα πάρει. Συνεπώς, μπορούμε να προσθέσουμε τις επιμέρους πιθανότητες για να πάρουμε τη ζητούμενη πιθανότητα, που είναι η ένωσή τους. Κάθε επιμέρους γεγονός έχει πιθανότητα $\frac{1}{\binom{52}{13}}$, οπότε η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$P(A \cup B \cup \Gamma \cup \Delta) = P(A) + P(B) + P(\Gamma) + P(\Delta) = \frac{4}{\binom{52}{13}}$$

(γ') Θεωρούμε τα γεγονότα:

$$A = \{\text{Ο παίχτης 1 έχει 13 σπαθιά}\}$$

$$B = \{\text{Ο παίχτης 1 έχει το Ρήγα κούπα}\}$$

• **A τρόπος:**

Ξέρουμε από τη θεωρία μας ότι για 2 ανεξάρτητα γεγονότα A και B θα πρέπει να ισχύει ότι:

$$P(A/B) = P(A) \quad \text{και} \quad P(B/A) = P(B)$$

Εδώ, αν γνωρίζουμε ότι το γεγονός B ισχύει, τότε ξέρουμε ότι δεν μπορεί να έχει και τα 13 σπαθιά. Με άλλα λόγια, $P(A/B) = 0$. Όμως, έχουμε δείξει ότι $P(A) = \frac{1}{\binom{52}{13}}$. Οπότε τα A και B δεν είναι ανεξάρτητα.

• **B τρόπος:**

Ξέρουμε από τη θεωρία μας ότι για 2 ανεξάρτητα γεγονότα A και B θα πρέπει να ισχύει ότι:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Επιπλέον, γνωρίζουμε ότι όταν δυο γεγονότα με μη μηδενική πιθανότητα είναι ξένα μεταξύ τους, τότε δεν μπορεί να είναι ανεξάρτητα, διότι τότε:

$$P(A \cap B) = 0 \neq P(A) \cdot P(B)$$

Εδώ, τα γεγονότα A και B είναι ξένα μεταξύ τους με μη μηδενικές πιθανότητες, άρα δε μπορεί να είναι ανεξάρτητα.

(δ') Θεωρούμε τα γεγονότα:

$$A = \{\text{Τα φύλλα του παίχτη 1 έχουν όλα το ίδιο σχήμα}\}$$

$$B = \{\text{Ο παίχτης 1 έχει το Ρήγα κούπα}\}$$

Θα δείξουμε ότι τα δύο γεγονότα είναι ανεξάρτητα δείχνοντας ότι: $P(B|A) = P(B)$.

Γνωρίζουμε ότι $P(B|A) = 1/4$, αφού δεδομένου ότι τα φύλλα του παίχτη 1 έχουν όλα το ίδιο σχήμα, γνωρίζουμε ότι το σχήμα μπορεί να είναι ένα από τα τέσσερα, είτε κούπες, είτε χαρό, είτε σπαθιά, είτε μπαστούνια. Κάθε σχήμα είναι ισοπίθανο με κάθε άλλο με πιθανότητα $1/4$. Παρατηρούμε, επιπλέον, για $P(B) = 1/4$, αφού κάθε ένας από τους 4 παίχτες μπορεί να πάρει τον Ρήγα κούπα με ίση πιθανότητα, άρα η πιθανότητα ο παίχτης 1 να πάρει τον Ρήγα κούπα είναι $1/4$.

Προσοχή: Η $P(B)$ θα ήταν $\frac{1}{52}$ αν είχα ένα παίχτη να τραβάει χαρτιά από την τράπουλα, όμως, ε-

δώ, έχω 4 παίχτες στους οποίους μοιράζονται τα φύλλα οπότε είναι στη ουσία: $\frac{\frac{1}{52}}{\frac{1}{52} + \frac{1}{52} + \frac{1}{52} + \frac{1}{52}} =$

$$\frac{\frac{1}{52}}{\frac{4}{52}} = \frac{1}{4}.$$

Εφόσον $P(B|A) = P(B)$, τα γεγονότα είναι ανεξάρτητα.

Επιπλέον, παρατηρήστε ότι τα δυο αυτά γεγονότα δεν είναι ξένα μεταξύ τους, καθώς η τομή τους δεν είναι κενή - και αυτή είναι το γεγονός ο παίχτης 1 να πάρει όλες τις κούπες.

Άσκηση 8

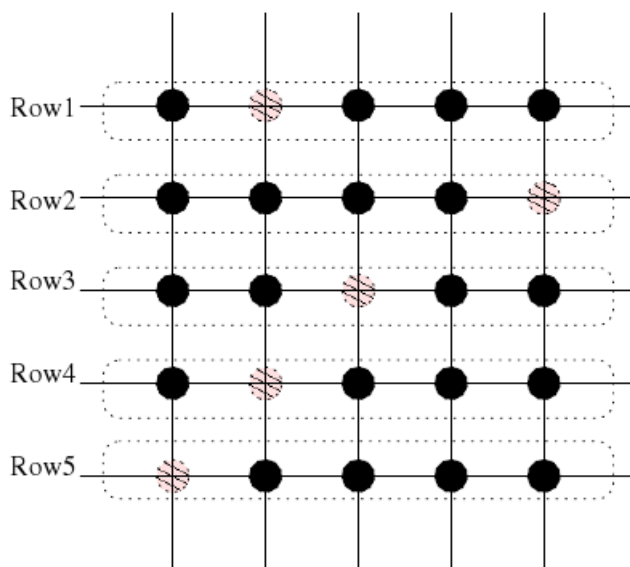
25 μαύρες μπάλες τοποθετούνται σε πέντε σειρές, με κάθε σειρά να περιέχει 5 μπάλες. Επιλέγουμε τυχαία 5 από τις μπάλες και τις βάφουμε κόκκινες.

- (α) Ποια είναι η πιθανότητα ότι όλες οι κόκκινες μπάλες βρίσκονται σε διαφορετικές σειρές;
 (β) Ποια είναι η πιθανότητα ότι όλες οι κόκκινες μπάλες βρίσκονται σε διαφορετικές σειρές και διαφορετικές στήλες;

Λύση:

(α) Υπάρχουν συνολικά $25 \times 24 \times 23 \times 22 \times 21 = 25!/20!$ τρόποι για να επιλέξεις 5 μπάλες από ένα σύνολο 25. Αυτό προκύπτει, αν σκεφτούμε ότι αρχικά υπάρχουν 25 μπάλες να επιλέξουμε για την πρώτη μπάλα, 24 επιλογές για την δεύτερη κ.ο.κ. Αν, τώρα, θέλουμε να επιλέξουμε 5 μπάλες, αλλά να βρίσκονται σε διαφορετικές σειρές, το πλήθος των επιλογών μας αλλάζει. Για την πρώτη μπάλα, έχουμε 25 επιλογές, για την δεύτερη μπάλα, δεν μπορούμε να επιλέξουμε μπάλες που βρίσκονται στην ίδια σειρά με την πρώτη μπάλα, άρα έχουμε $25 - 5 = 20$ επιλογές. Ομοίως, για την τρίτη μπάλα, έχουμε $20 - 5 = 15$ επιλογές, εφόσον δεν μπορεί να είναι από την ίδια σειρά που πήραμε την πρώτη ή την δεύτερη μπάλα. Με παρόμοιο τρόπο, προκύπτουν και τα πλήθη των δυνατών επιλογών και για τις υπόλοιπες μπάλες. Συνεπώς, η ζητούμενη πιθανότητα να επιλέξουμε 5 μπάλες οι οποίες βρίσκονται σε διαφορετικές σειρές είναι:

$$\frac{25 \times 20 \times 15 \times 10 \times 5}{\frac{25!}{20!}}.$$



Σχήμα 1: Σχηματική αναπαράσταση για το ερώτημα (α) της άσκησης 8.

(β) Κοιτάζοντας το 5×5 πλέγμα, υπάρχουν πέντε θέσεις για να επιλέξουμε την πρώτη μπάλα από την πρώτη σειρά. Για την δεύτερη μπάλα, υπάρχουν τέσσερις θέσεις στην δεύτερη σειρά από τις οποίες μπορούμε να την επιλέξουμε. Ομοίως, για την τρίτη μπάλα, υπάρχουν τρεις πιθανές θέσεις στην τρίτη σειρά και δύο θέσεις από την τέταρτη σειρά για την τέταρτη μπάλα. Τέλος, για την πέμπτη μπάλα υπάρχει μονάχα μια θέση στην πέμπτη σειρά που μπορούμε να την επιλέξουμε. Άρα, ο συνολικός αριθμός θέσεων που μπορούμε να επιλέξουμε είναι : $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5!$. Παρατηρήστε ότι υπάρχουν $5!$ τρόποι για να ταξινομήσουμε τις πέντε σειρές. Άρα, ο συνολικός αριθμός που μπορούμε να επιλέξουμε πέντε μπάλες έτσι ώστε να βρίσκονται σε διαφορετικές σειρές και διαφορετικές στήλες είναι:

$$5!5!$$

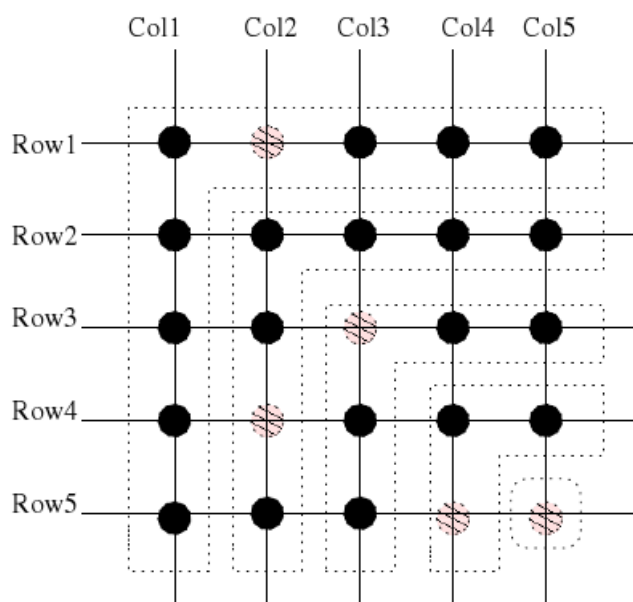
Ο συνολικός αριθμός επιλογών πέντε μπάλες από 25 είναι $\frac{25!}{20!}$, άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$\frac{5!5!}{\frac{25!}{20!}}$$

Ένας εναλλακτικός τρόπος για να σκεφτούμε το ίδιο πρόβλημα είναι ο ακόλουθος:

Για την πρώτη μπάλα, έχουμε 25 πιθανές θέσεις από όπου μπορούμε να την επιλέξουμε. Εμποδίζοντας την σειρά και την στήλη από την οποία την επιλέξαμε, μας απομένουν 16 θέσεις επιλογής για την δεύτερη μπάλα. Ομοίως, εμποδίζοντας την σειρά και την στήλη που επιλέξαμε την δεύτερη μπάλα μας μένουν 9 θέσεις επιλογής για την τρίτη μπάλα, για την τέταρτη 4 θέσεις, ενώ για την τελευταία 1 θέση. Άρα, το συνολικό πλήθος που μπορούμε να επιλέξουμε τις 5 μπάλες από διαφορετικές σειρές και διαφορετικές στήλες είναι $25 \times 16 \times 9 \times 4 \times 1$. Άρα, η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$\frac{25 \times 16 \times 9 \times 4 \times 1}{\frac{25!}{20!}}$$



Σχήμα 2: Σχηματική αναπαράσταση για το ερώτημα β της άσκησης 8.

Άσκηση 9

Μία σχολική τάξη με 120 μαθητές θα πάει να επισκευθεί με 3 λεωφορεία ένα μουσείο. Οι μαθητές έχουν καταταξιωθεί 36 στο πρώτο, 40 στο δεύτερο και 44 στο τρίτο λεωφορείο. Μόλις τα λεωφορεία φτάσουν, επιλέγουμε στην τύχη ένα μαθητή. Έστω X ο αριθμός των μαθητών που είναι στο λεωφορείο του τυχαία επιλεγμένου μαθητή. Να βρεθεί η συνάρτηση πιθανότητας και η μέση τιμή της τ.μ. X .

Λύση:

Αφού ο κάθε μαθητής που επιλέγεται τυχαία από τους 120 μαθητές έχει την ίδια πιθανότητα να επιλεγεί, έχουμε ότι:

$$P(X = 36) = \frac{36}{120}, \quad P(X = 40) = \frac{40}{120}, \quad P(X = 44) = \frac{44}{120}$$

Συνεπώς,

$$E[X] = 36 \left(\frac{3}{10} \right) + 40 \left(\frac{1}{3} \right) + 44 \left(\frac{11}{30} \right) = \frac{1208}{30} = 40.2667$$

Άσκηση 10

Θεωρείστε την διακριτή τ.μ. X με συνάρτηση πιθανότητας (σ.π.):

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{a} & \text{αν } x = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \\ 0 & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

α) Υπολογίστε τη σταθερά a και τη μέση τιμή $E[X]$.

β) Υπολογίστε τη σ.π. της τ.μ. $Z = (X - E[X])^2$.

γ) Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα του (β), υπολογίστε τη διασπορά της τ.μ. X .

Λύση:

(α) Το άθροισμα της συνάρτησης πιθανότητας όλων των πιθανών τιμών ισούται με 1. Επομένως,

$$1 = \sum_{x=-3}^3 p_X(x) = \frac{9}{a} + \frac{4}{a} + \frac{1}{a} + \frac{1}{a} + \frac{4}{a} + \frac{9}{a} = \frac{28}{a},$$

Άρα, $a = 28$. Η μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής X είναι:

$$E[X] = \sum_x x p_X(x) = \sum_{x=-3}^3 x \cdot \frac{x^2}{a} = -3 \cdot \frac{9}{a} - 2 \cdot \frac{4}{a} - 1 \cdot \frac{1}{a} + 1 \cdot \frac{1}{a} + 2 \cdot \frac{4}{a} + 3 \cdot \frac{9}{a} = 0.$$

Παρατηρείστε ότι η μέση τιμή μιας τυχαίας μεταβλητής ισούται πάντα με 0, εάν η συνάρτηση πιθανότητας είναι μια άρτια συνάρτηση, δηλαδή αν $p_X(x) = p_X(-x) \forall x$.

(β) Ο παρακάτω πίνακας δείχνει τις τιμές του Z για ένα δεδομένο X , και την πιθανότητα του γεγονότος αυτού.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$p_X(x)$	9/28	1/7	1/28	0	1/28	1/7	9/28
$Z X=x$	9	4	1	0	1	4	9

Παρατηρούμε ότι το Z μπορεί να πάρει μόνο τρεις τιμές με πιθανότητα μη μηδενική (1,4,9). Επιπλέον, κάθε τέτοια τιμή αντιστοιχεί σε δύο τιμές του X . Άρα, έχουμε, για παράδειγμα, $p_Z(9) = P(Z = 9) = P(Z = -3) + P(Z = 3) = p_X(-3) + p_X(3)$. Άρα, η συνάρτηση πιθανότητας της Z είναι:

$$p_Z(z) = \begin{cases} 1/14 & z = 1, \\ 2/7 & z = 4, \\ 9/14 & z = 9, \\ 0 & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

$$(\gamma) \text{ Ισχύει ότι: } \text{var}(X) = E[(X - E[X])^2] \Rightarrow \text{var}(X) = E[Z] = 1 \cdot \frac{1}{14} + 4 \cdot \frac{2}{7} + 9 \cdot \frac{9}{14} = 7.$$

Άσκηση 11

Το κατάστημα της γειτονιάς σας πραγματοποιεί εκκαθάριση. Τα πάντα πρέπει να πωληθούν, νέα και παλιά! Το κατάστημα έχει 1000 παλιά κομμάτια και 1500 καινούρια. Το πρόβλημα είναι ότι 15% των παλιών είναι ελαττωματικά καθώς και 5% των νέων.

(α') Ρίχνετε ένα δίκαιο κέρμα για να αποφασίσετε αν θα αγοράσετε παλιό ή νέο προϊόν. Διαλέγετε δύο κομμάτια του ίδιου τύπου (νέα ή παλιά) ανάλογα με το αποτέλεσμα μίας και μοναδικής ρίψης του κέρματος.

Ποια η πιθανότητα ότι και τα δύο θα είναι ελαττωματικά;

(β') Δεδομένων των συνθηκών στο (α), και του ότι και τα δύο αντικείμενα είναι ελαττωματικά, ποια η πιθανότητα ότι και τα δύο είναι παλιά;

Λύση:

(α') Έστω

$$A = \{\text{Τα επιλεγμένα κομμάτια είναι ελαττωματικά}\}$$

$$B_1 = \{\text{Επιλέγονται 2 παλιά κομμάτια}\}$$

$$B_2 = \{\text{επιλέγονται 2 νέα κομμάτια}\}$$

Τα γεγονότα B_1 και B_2 είναι ξένα και αποτελούν μια διαμέριση του Ω το καθένα με θετική πιθανότητα. Συνεπώς, η ζητούμενη πιθανότητα, σύμφωνα με το Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας, θα ισούται με

$$P(A) = P(B_1) \cdot P(A | B_1) + P(B_2) \cdot P(A | B_2) \quad (1)$$

Τα κομμάτια έχουν ίση πιθανότητα να είναι καινούρια ή παλιά, λόγω της επιλογής μέσω ρίψης δίκαιου κέρματος, άρα $P(B_1) = P(B_2) = \frac{1}{2}$.

Υπάρχουν $\binom{1000}{2}$ τρόποι, με ίση πιθανότητα, επιλογής δύο παλιών κομματιών από ένα σύνολο από 1000 παλιά κομμάτια. Εφόσον 15% των παλιών κομματιών είναι ελαττωματικά, υπάρχουν 150 ελαττωματικά παλιά κομμάτια.

Υπάρχουν $\binom{150}{2}$ τρόποι επιλογής 2 ελαττωματικών παλιών κομματιών από ένα σύνολο από 150 ελαττωματικά παλιά κομμάτια. Επομένως, θα έχουμε:

$$P(A | B_1) = \frac{\binom{150}{2}}{\binom{1000}{2}}$$

Παρομοίως, ένα 5% από τα νέα κομμάτια (75) είναι ελαττωματικά.

Δεδομένου ότι 2 νέα κομμάτια επιλέγονται, θα έχουμε:

$$P(A | B_2) = \frac{\binom{75}{2}}{\binom{1500}{2}}$$

Άρα, τελικά:

$$(1) \Rightarrow P(A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\binom{150}{2}}{\binom{1000}{2}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\binom{75}{2}}{\binom{1500}{2}}$$

(β') Ψάχνουμε για την πιθανότητα $P(B_1 | A)$. Σε αντιστοιχία με τη θεωρία, η παρατήρηση/αποτέλεσμα είναι ότι τα αντικείμενα είναι ελαττωματικά και η αιτία για την οποία ψάχνουμε κατά πόσον συμβάλλει στο αποτέλεσμα είναι η παλαιότητα των κομματιών.

Χρησιμοποιώντας, λοιπόν, τον κανόνα του Bayes θα έχουμε:

$$\begin{aligned} P(B_1 | A) &= \frac{P(B_1) \cdot P(A | B_1)}{P(B_1) \cdot P(A | B_1) + P(B_2) \cdot P(A | B_2)} \\ &= \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{\binom{150}{2}}{\binom{1000}{2}}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{\binom{150}{2}}{\binom{1000}{2}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\binom{75}{2}}{\binom{1500}{2}}} \end{aligned}$$