

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2021-2022
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Φροντιστήριο 2

Άσκηση 1

Μια φυλή Βεδουίνων ψάχνει να βρει νερό στην έρημο. Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιούν το σοφό της φυλής, ο οποίος με την εμπειρία του και το μαγικό ραβδί του μπορεί να εντοπίζει το νερό με πιθανότητα 0.93, δηλαδή αν υπάρχει νερό σε ένα σημείο θα το βρει με πιθανότητα 93%. Επίσης, ο σοφός κάνει λάθος και λέει ότι βρήκε νερό όταν δεν υπάρχει νερό στο 12% των περιπτώσεων. Έστω η εκ των προτέρων (α priori) πιθανότητα ύπαρξης νερού σε οποιοδήποτε σημείο στην έρημο είναι 0.05.

- α) Αν κάποια στιγμή ο σοφός φωνάξει «βρήκα νερό», ποιά η πιθανότητα πραγματικά να υπάρχει νερό;
- β) Αν φωνάξει «δεν υπάρχει νερό εδώ», ποιά η πιθανότητα πραγματικά να μην υπάρχει νερό;

Λύση

Έστω A το ενδεχόμενο υπάρχει νερό και N το ενδεχόμενο ο σοφός να πει ότι βρήκε νερό. Ισχύουν:

$$P(N|A) = 0.93, \quad P(N|A^c) = 0.12, \quad P(A) = 0.05$$

$$P(N) = P(A)P(N|A) + P(A^c)P(N|A^c) = 0.05 \cdot 0.93 + 0.95 \cdot 0.12 = 0.1605$$

$$P(A|N) = \frac{P(A)P(N|A)}{P(N)} = \frac{0.05 \cdot 0.93}{0.1605} = 0.2897,$$

$$P(A^c|N^c) = \frac{P(A^c)P(N^c|A^c)}{P(N^c)} = \frac{(1-P(A))(1-P(N|A^c))}{(1-P(N))} = \frac{(1-0.05)(1-0.12)}{(1-0.1605)} = 0.996$$

Άσκηση 2

Όταν στέλνονται κωδικοποιημένα μηνύματα, πολλές φορές υπάρχουν απώλειες/σφάλματα κατά την μετάδοσή τους. Για παράδειγμα, ο κώδικας Μόρς χρησιμοποιεί τελείες και παύλες, τα οποία εμφανίζονται με αναλογία 3:4. Ας υποθέσουμε ότι στη γραμμή μετάδοσης υπάρχουν παρεμβολές/θόρυβος

και με πιθανότητα $\frac{1}{8}$ μια τελεία μπορεί να μεταδοθεί ως παύλα και αντίστροφα. Ποια η πιθανότητα το λαμβανόμενο σήμα να είναι το ίδιο με αυτό που εστάλη, α) αν το λαμβανόμενο σήμα είναι τελεία και β) αν το λαμβανόμενο σήμα είναι παύλα;

Λύση

Ορίζω τα ενδεχόμενα:

$$T_\tau = \{\text{στέλνουμε τελεία}\} \quad R_\tau = \{\text{λαμβάνουμε τελεία}\}$$

$$T_\pi = \{\text{στέλνουμε παύλα}\} \quad R_\pi = \{\text{λαμβάνουμε παύλα}\}$$

Η αναλογία τελείες προς παύλες είναι 3:4. Αυτό, σημαίνει ότι για κάθε 7 σύμβολα, κατά μέσο όρο τα 3 θα είναι τελείες και τα 4 θα είναι παύλες, και επομένως:

$$P(T_\tau) = \frac{3}{7} \text{ και } P(T_\pi) = \frac{4}{7}$$

Η παραπάνω είναι η πιο διαισθητική εξήγηση των πιθανοτήτων $P(T_\tau)$ και $P(T_\pi)$. Η αναλυτική απόδειξη έχει ως εξής. Ισχύει ότι

$$\frac{P(T_\tau)}{P(T_\pi)} = \frac{3}{4} \Rightarrow P(T_\tau) = \frac{3}{4}P(T_\pi),$$

$$P(T_\tau) + P(T_\pi) = 1 \Rightarrow \frac{3}{4}P(T_\pi) + P(T_\pi) = 1 \Rightarrow P(T_\pi) = \frac{4}{7}.$$

Επίσης,

$$P(T_\tau) = 1 - P(T_\pi) = \frac{3}{7}.$$

Τελικά, έχουμε τις πιθανότητες:

$$P(R_\pi|T_\tau) = 1/8, P(R_\tau|T_\pi) = 1/8, P(T_\tau) = 3/7, P(T_\pi) = 4/7$$

Έχουμε δύο περιπτώσεις:

1. Αν το λαμβανόμενο σήμα είναι τελεία έχουμε:

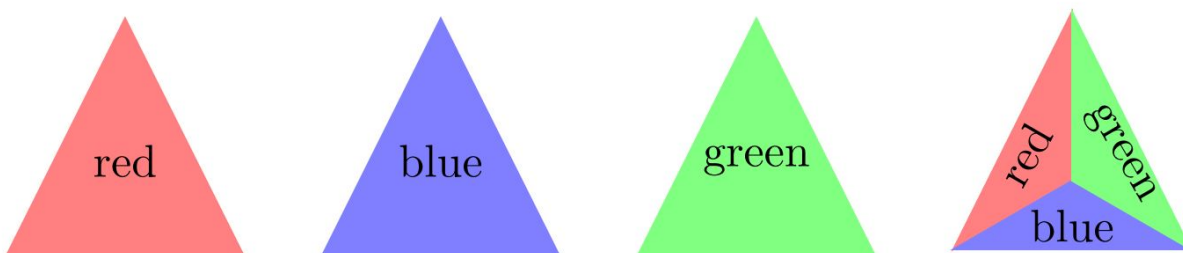
$$R(T_\tau|R_\tau) = \frac{P(R_\tau|T_\tau)P(T_\tau)}{P(R_\tau|T_\tau)P(T_\tau) + P(R_\tau|T_\pi)P(T_\pi)} = \frac{\frac{7}{8} \cdot \frac{3}{7}}{\frac{7}{8} \cdot \frac{3}{7} + \frac{1}{8} \cdot \frac{5}{7}} = \frac{21}{26}$$

2. Αν το λαμβανόμενο σήμα είναι παύλα έχουμε:

$$R(T_\pi|R_\pi) = \frac{P(R_\pi|T_\pi)P(T_\pi)}{P(R_\pi|T_\pi)P(T_\pi) + P(R_\pi|T_\tau)P(T_\tau)} = \frac{\frac{7}{8} \cdot \frac{4}{7}}{\frac{7}{8} \cdot \frac{4}{7} + \frac{1}{8} \cdot \frac{3}{7}} = \frac{28}{31}$$

Άσκηση 3

Ένα τετράεδρο έχει τις 4 πλευρές του βαμμένες όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Μια είναι βαμμένη όλη κόκκινη, μια είναι μπλέ, μια πράσινη και μια βαμμένη κόκκινη, μπλέ και πράσινη.



Ρίχνουμε το τετράεδρο και η πιθανότητα μια οποιαδήποτε πλευρά του να ακουμπάει στο πάτωμα είναι ίση με $\frac{1}{4}$. Ορίζουμε τα εξής γεγονότα:

$R = \{\text{Η πλευρά που ακουμπάει στο πάτωμα περιέχει το κόκκινο χρώμα}\}$

$B = \{\text{Η πλευρά που ακουμπάει στο πάτωμα περιέχει το μπλέ χρώμα}\}$

$G = \{\text{Η πλευρά που ακουμπάει στο πάτωμα περιέχει το πράσινο χρώμα}\}$

(α) Υπολογίστε τις πιθανότητες των γεγονότων R , B , και G .

(β) Είναι τα γεγονότα R , B , και G ανα δύο ανεξάρτητα;

(γ) Είναι τα γεγονότα R , B , και G ανεξάρτητα;

Λύση

(α) Προφανώς, $P(R) = P(B) = P(G) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ καθώς 2 στις 4 πλευρές του τετράεδρου περιέχουν κόκκινο, μπλέ ή πράσινο χρώμα.

(β) $P(R \cap G) = P(G \cap B) = P(B \cap R) = \frac{1}{4}$ καθώς μόνο η τέταρτη πλευρά περιέχει ταυτόχρονα 2 χρώματα.

Έχουμε λοιπόν:

$$P(R \cap G) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(R) \cdot P(G)$$

$$P(G \cap B) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(G) \cdot P(B)$$

$$P(B \cap R) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(B) \cdot P(R)$$

άρα τα γεγονότα R , B , G είναι ανεξάρτητα ανά δύο.

Προσέξτε ότι, εφόσον τα ενδεχόμενα R , G , B μπορούν να συμβούν και τα τρία στην περίπτωση της 4ης έδρας, δεν διαμερίζουν πλήρως τον δειγματοχώρο (αφού δεν είναι ανά δύο ξένα μεταξύ τους) και άρα το άθροισμα των πιθανοτήτων τους δεν ισούται με 1!

(Υ)

$$P(R \cap B \cap G) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} = P(R) \cdot P(B) \cdot P(G) .$$

Εναλλακτικά:

$$P(R \cap B | G) = \frac{P(R \cap B \cap G)}{P(G)} = \frac{1/4}{1/2} = \frac{1}{2} \neq \frac{1}{4} = P(R \cap B) .$$

Επομένως τα γεγονότα R , B , G δεν είναι ανεξάρτητα.