

HY-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2021-2022
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Φροντιστήριο 1

Άσκηση 1

Αν A, B, C είναι τρία ενδεχόμενα, γράψτε τα σύνολα που περιγράφουν τα παρακάτω ενδεχόμενα:

- α) Δεν συμβαίνει κανένα από τα A, B, C .
- β) Συμβαίνει το πολύ ένα από τα A, B, C .
- γ) Συμβαίνει ακριβώς ένα από τα A, B, C .
- δ) Συμβαίνουν τουλάχιστον δύο από τα A, B, C .
- ε) Συμβαίνουν το πολύ δύο από τα A, B, C .

Λύση

- α) $(A \cup B \cup C)^c = A^c \cap B^c \cap C^c$
- β) $(A \cap B^c \cap C^c) \cup (A^c \cap B \cap C^c) \cup (A^c \cap B^c \cap C) \cup (A^c \cap B^c \cap C^c)$, δηλαδή ή θα συμβεί μόνο το A , ή μόνο το B , ή μόνο το C , ή κανένα από τα A, B, C .
- γ) $(A \cap B^c \cap C^c) \cup (A^c \cap B \cap C^c) \cup (A^c \cap B^c \cap C)$
- δ) $(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$
- ε) Θέλουμε να συμβαίνουν το πολύ δύο από τα A, B, C , δηλαδή να μη συμβαίνουν και τα 3 ενδεχόμενα μαζί. Άρα το ενδεχόμενο αυτό είναι το σύνολο $(A \cap B \cap C)^c$.

Άσκηση 2

Τα ακόλουθα δεδομένα δόθηκαν σε μια έρευνα ενός συνόλου 1000 εγγεγραμμένων σε ένα περιοδικό: Αναφορικά με εργασία, οικογενειακή κατάσταση και μόρφωση, υπήρχαν 312 επαγγελματίες, 470 παντρεμένοι, 525 απόφοιτοι κολεγίου, 42 επαγγελματίες απόφοιτοι κολεγίου, 147 παντρεμένοι απόφοιτοι κολεγίου, 86 παντρεμένοι επαγγελματίες και 25 παντρεμένοι επαγγελματίες απόφοιτοι κολεγίου. Αποδείξτε ότι τα νούμερα που αναφέρθηκαν στη μελέτη πρέπει να είναι ανακριβή.

Λύση Έστω M το σύνολο των επαγγελματιών, W το σύνολο των παντρεμένων και G το σύνολο των αποφοίτων πανεπιστημίου. Για να δείξουμε ότι τα νούμερα που μας παρουσιάζουν δεν είναι ακριβή, αρκεί να δείξουμε ότι $P(M \cup W \cup G) > 1$. Έχουμε ότι

$$P(M) = \frac{312}{1000}, \quad P(W) = \frac{470}{1000}, \quad P(G) = \frac{525}{1000}, \quad P(M \cap G) = \frac{42}{1000},$$
$$P(W \cap G) = \frac{147}{1000}, \quad P(W \cap M) = \frac{86}{1000}, \quad P(M \cap W \cap G) = \frac{25}{1000}.$$

Άρα η ζητούμενη πιθανότητα γίνεται:

$$\begin{aligned}
 P(M \cup W \cup G) &= P((M \cup W) \cup G) \\
 &= P(M \cup W) + P(G) - P((M \cup W) \cap G) \\
 &= P(M) + P(W) - P(M \cap W) + P(G) - P((M \cap G) \cup (W \cap G)) \\
 &= P(M) + P(W) - P(M \cap W) + P(G) - P(M \cap G) - P(W \cap G) + P(M \cap G \cap W) \\
 &= \frac{312 + 470 + 525 + 25 - (147 + 42 + 86)}{1000} \\
 &= \frac{1057}{1000} > 1
 \end{aligned}$$

Επομένως, τα νούμερα είναι αναληθή.

Άσκηση 3

Αν A, B είναι ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω για τα οποία ισχύει: $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = 2x$ και $P(A \cup B) = 4x^2 + \frac{3}{4}$, να βρεθεί ο $x > 0$.

Λύση Ξέρουμε ότι:

$$P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$$

Επομένως αντικαθιστώντας τα δεδομένα της άσκησης, έχουμε:

$$4x^2 + \frac{3}{4} \leq \frac{1}{2} + 2x$$

$$16x^2 + 3 - 8 - 8x \leq 0$$

$$16x^2 - 8x - 5 \leq 0$$

$$(4x - 1)^2 \leq 0$$

Άρα αναγκαστικά :

$$(4x - 1)^2 = 0$$

$$4x - 1 = 0$$

$$x = \frac{1}{4}$$

(Μάλιστα παρατηρώ ότι A, B ασυμβίβαστα, αφού $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.)

Άσκηση 4

Ο Γιάννης έχει ένα ζευγάρι από 'πειραγμένα' τετράεδρα ζάρια. Σε κάθε ρίψη, η πιθανότητα να φέρει ένα οποιοδήποτε ζεύγος είναι ανάλογη του γινομένου των δύο αριθμών που έφεραν τα ζάρια. Θεωρείστε ότι ζεύγη της μορφής (x, y) και (y, x) είναι δύο διαφορετικά ζεύγη.

α) Περιγράψτε το δειγματοχώρο του πειράματος.

β) Ποια η πιθανότητα το γινόμενο να είναι ζυγός αριθμός;

γ) Ποια η πιθανότητα να φέρει ένα από τα ζάρια 2 και το άλλο 3;

Λύση

α) Ο δειγματοχώρος της άσκησης και οι πιθανότητες όλων των αποτελεσμάτων φαίνονται στον πίνακα παρακάτω. Οι πιθανότητες αυτές είναι συναρτήση της πιθανότητας $p \in [0, 1]$ που πρέπει να υπολογίσουμε για να απαντήσουμε στα επόμενα υποερωτήματα.

Ζάρι 1	Ζάρι 2	Γινόμενο	Πιθανότητα
1	1	1	p
1	2	2	$2p$
1	3	3	$3p$
1	4	4	$4p$
2	1	2	$2p$
2	2	4	$4p$
2	3	6	$6p$
2	4	8	$8p$
3	1	3	$3p$
3	2	6	$6p$
3	3	9	$9p$
3	4	12	$12p$
4	1	4	$4p$
4	2	8	$8p$
4	3	12	$12p$
4	4	16	$16p$
Σύνολο			$100p$

Για να υπολογίσουμε το p αρκεί να σκεφτούμε ότι $P(\Omega) = 1$ οπότε $100p = 1 \Rightarrow p = \frac{1}{100} = 0.01$

β) Έστω A το γεγονός ότι το γινόμενο είναι ζυγός αριθμός, τότε έχουμε ότι:

$$P(A) = 2p + 4p + 2p + 4p + 6p + 8p + 6p + 12p + 4p + 8p + 12p + 16p = 84p = 0.84$$

γ) Έστω B το γεγονός ότι τα ζάρια έφεραν 2 και 3, τότε έχουμε ότι:

$$P(B) = P(2, 3) + P(3, 2) = 6p + 6p = 12p = 0.12$$

Άσκηση 5

Ένα μικροβιολογικό εργαστήριο θέλει να κάνει μια μελέτη σε δύο μικροοργανισμούς που προκαλούν μια ασθένεια, τον A και τον B . Βλέποντας τα δείγματα των ασθενών, παρατηρούμε ότι το 60 % από αυτούς δεν έχουν μολυνθεί ούτε από τον A αλλά ούτε και από τον B , το 20% έχει μολυνθεί από τον A και το 30% από τον B . Έστω ότι ο γιατρός επιλέγει τυχαία τον άκελο ενός ασθενή.

(α) Ποια η πιθανότητα ο ασθενής να έχει μολυνθεί από τον μικροοργανισμό A ή απο τον μικροοργανισμό B ;

(β) Ποια η πιθανότητα ο ασθενής να έχει μολυνθεί από τον μικροοργανισμό A και απο τον μικροοργανισμό B ;

Λύση

Εστω X το γεγονός ένας ασθενής να έχει μολυνθεί από τον A και Y να έχει μολυνθεί από τον B . Οπότε :

(α) Η πιθανότητα που μας ζητείται να υπολογίσουμε είναι η $P(X \cup Y)$, άρα

$$P(X \cup Y) = 1 - P((X \cup Y)^c) = 1 - P(X^c \cap Y^c) = 1 - 0.6 = 0.4$$

(β) Η πιθανότητα που μας ζητείται να υπολογίσουμε είναι η $P(X \cap Y)$. Από την θεωρία γνωρίζουμε ότι

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

άρα από την εξίσωση του (α) προκύπτει ότι :

$$P(X \cup Y) = P(X) + P(Y) - P(X \cap Y) \Rightarrow 0.4 = 0.2 + 0.3 - P(X \cap Y) \Rightarrow P(X \cap Y) = 0.1$$

Άσκηση 6

Έστω A, B, C ανθαίρετα γεγονότα του δειγματικού χώρου S . Αποφασίστε ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές και ποιες είναι λάθος.

α) $(A - B) \cup B = (A \cap B^c) \cup B = B$

β) $(A \cup B) - A = (A \cup B) \cap A^c = B$

γ) $(A \cap B) \cap (A - B) = (A \cap B) \cap (A \cap B^c) = \emptyset$

δ) $(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$

Λύση

α) Λάθος.

$$(A - B) \cup B = (A \cap B^c) \cup B = (A \cup B) \cap (B^c \cup B) = (A \cup B) \cap S = A \cup B$$

β) Λάθος.

$$(A \cup B) - A = (A \cup B) \cap A^c = (A \cap A^c) \cup (B \cap A^c) = \emptyset \cup (B^c \cap A) = B \cap A^c = B - A$$

γ) Σωστό.

$$(A \cap B) \cap (A - B) = (A \cap B) \cap (A \cap B^c) = A \cap (B \cap B^c) = A \cap \emptyset = \emptyset$$

δ) Σωστό.

$$(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) = [(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap B) \cup (B \cap C)] \cap (C \cup A) = [(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup B \cup (B \cap C)] \cap (C \cup A) \quad (*)$$

Όμως, αν $A_1 \subseteq A_2$ τότε $A_1 \cup A_2 = A_2$ και $A \cap B, B \cap C \subseteq B$ άρα:

$$(*) = [(A \cap C) \cup B] \cap (C \cup A) = ((A \cap C) \cap C) \cup (B \cap C) \cup ((A \cap C) \cap A) \cup (B \cap A) = (A \cap C) \cup (B \cap C) \cup (A \cap C) \cup (B \cap A) = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$$