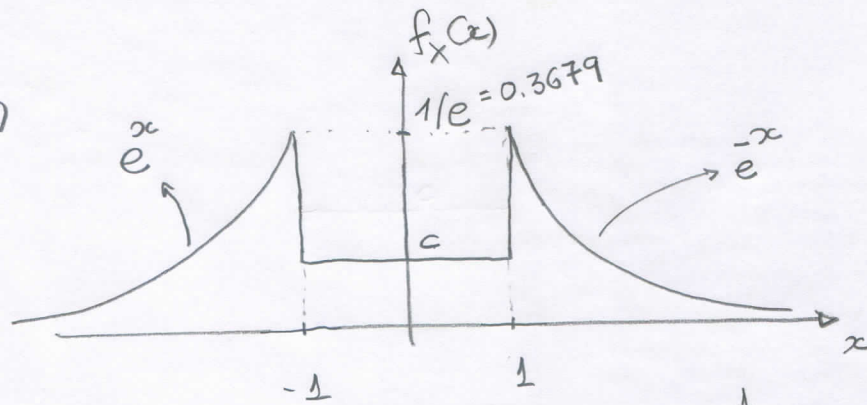


27-1-2022

①

ΘΕΜΑ 1^ο

(α)



Πρέπει

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = 1 \Rightarrow \int_{-\infty}^{-1} e^x dx + \int_{-1}^1 c dx + \int_1^{+\infty} e^{-x} dx = 1$$

$$\Rightarrow \left. \frac{x}{e} \right|_{-\infty}^{-1} + c x \Big|_{-1}^1 - \left. \frac{e^{-x}}{1} \right|_1^{+\infty} = 1 \Rightarrow \frac{-1}{e} + 2c + \frac{-1}{e} = 1 \Rightarrow$$

$$2c + \frac{2}{e} = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{2} - \frac{1}{e} = \underline{\underline{0.1321}}$$

(β) Για $x \leq -1$, $F_X(x) = \int_{-\infty}^x e^t dt = e^t \Big|_{-\infty}^x = e^x$

Για $-1 < x \leq 1$, $F_X(x) = \int_{-\infty}^{-1} e^t dt + \int_{-1}^x c dt = e^t \Big|_{-\infty}^{-1} + ct \Big|_{-1}^x$

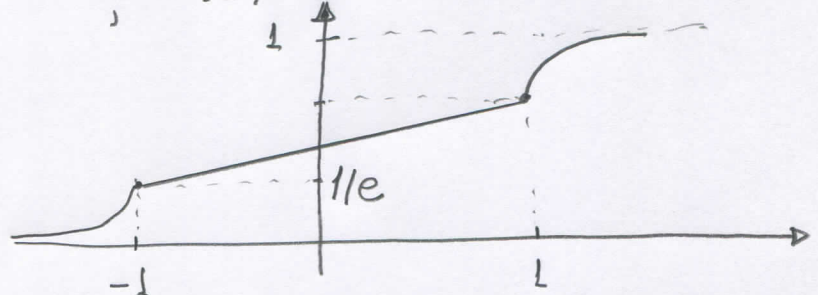
$$= \frac{1}{e} + c(x+1) = 0.1321x + 0.5$$

Για $x > 1$, $F_X(x) = \int_{-\infty}^{-1} e^t dt + \int_{-1}^1 c dt + \int_1^x e^{-t} dt$

$$= e^t \Big|_{-\infty}^{-1} + ct \Big|_{-1}^1 - \left. \frac{e^{-t}}{1} \right|_1^x = \frac{1}{e} + 2c - \frac{e^{-x}}{1} + \frac{1}{e}$$

$$= \frac{2}{e} + 2c - e^{-x} = 1 - e^{-x}$$

$$\therefore F_X(x) = \begin{cases} e^x, & x \leq -1 \\ 0.1321x + 0.5, & -1 \leq x \leq 1 \\ 1 - e^{-x}, & x > 1 \end{cases}$$



$$(8) \quad P(-0.5 \leq X \leq 2) = F_X(2) - F_X(-0.5)$$

$$= 1 - e^{-2} - [0.1321(-0.5) + 0.5] = \underline{\underline{0.4307}}$$

ΘΕΜΑ 2ο

T : Τ.μ. χρόνος ζωής εξαρτήματος

Έστω $M = \{ \text{ο μικροεπεξεργαστής προέρχεται από τη Malaysia} \}$
 $V = \{ \text{--- Vietnam} \}$

$P(M) = P(V) = \frac{1}{2}$. Επίσης, από την εκτίμηση μας δίδεται ότι:

$$\left. \begin{aligned} F_{T/M}(t) &= P(T \leq t | M) = 1 - e^{-at}, \quad t > 0 \\ F_{T/V}(t) &= P(T \leq t | V) = 1 - e^{-bt}, \quad t > 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{Δεδομένες ΑΕΚ της } T \\ &\Rightarrow \text{δεδομένου του } M \text{ και } V: \\ &T/M \sim \exp(a) \\ &T/V \sim \exp(b) \end{aligned}$$

(a) Από το ΘΟΠ, η αθροιστική συνάρτηση κατανομής της T είναι:

$$\begin{aligned} F_T(t) &= P(T \leq t) = P(M)P(T \leq t | M) + P(V)P(T \leq t | V) \\ &= \frac{1}{2}(1 - e^{-at}) + \frac{1}{2}(1 - e^{-bt}) \\ \therefore F_T(t) &= 1 - \frac{1}{2}(e^{-at} + e^{-bt}), \quad t > 0 \end{aligned}$$

Παραγωγίζοντας, έχουμε τη β.π.π. $f_T(t)$:

$$f_T(t) = \frac{1}{2} a e^{-at} + \frac{1}{2} b e^{-bt}, \quad t > 0$$

$$(p) \quad P(V | t_1 < T < t_2) = \frac{P(V) \cdot P(t_1 < T < t_2 | V)}{P(t_1 < T < t_2)} \quad [\text{Bayes}]$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\frac{1}{2} [F_{T/V}(t_2) - F_{T/V}(t_1)]}{F_T(t_2) - F_T(t_1)} = \frac{\frac{1}{2} [1 - e^{-bt_2} - (1 - e^{-bt_1})]}{1 - \frac{1}{2}(e^{-at_2} + e^{-bt_2}) - [1 - \frac{1}{2}(e^{-at_1} + e^{-bt_1})]} \\ &= \frac{\frac{1}{2} (e^{-bt_1} - e^{-bt_2})}{\frac{1}{2} (e^{-bt_1} - e^{-bt_2} + e^{-at_1} - e^{-at_2})} = \frac{1}{1 + \frac{e^{-at_1} - e^{-at_2}}{e^{-bt_1} - e^{-bt_2}}} \end{aligned}$$

(α) Έστω X_i η μέτρηση των οργάνων i ($i=1,2$) και e_i το αντίστοιχο σφάλμα (error) της μέτρησης. Τότε $e_i = X_i - L$.
Επίσης, μας δίδεται ότι:

$$e_1 \sim N(0, (0.006L)^2), \quad e_2 \sim N(0, (0.004L)^2)$$

Καθώς οι e_1 και e_2 είναι Γκαουσιανές τ.μ., και οι τ.μ. X_1 και X_2 είναι επίσης Γκαουσιανές:

$$X_1 = e_1 + L \sim N(L, (0.006L)^2)$$

$$X_2 = e_2 + L \sim N(L, (0.004L)^2)$$

Ο μέσος όρος, Y , των δύο μετρήσεων είναι $Y = \frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{2}X_2$.

Η Y είναι επίσης Γκαουσιανή ως γραμμικός συνδυασμός ανεξάρτητων Γκαουσιανών.

$$E[Y] = \frac{1}{2}E[X_1] + \frac{1}{2}E[X_2] = \frac{1}{2}L + \frac{1}{2}L = L$$

$$\text{var}(Y) = \frac{1}{4}\text{var}(X_1) + \frac{1}{4}\text{var}(X_2) = \frac{1}{4}(0.006L)^2 + \frac{1}{4}(0.004L)^2$$

$$\therefore \sigma_Y = \sqrt{\text{var}(Y)} = \frac{L}{2} \sqrt{0.006^2 + 0.004^2} = 0.0036L$$

$$\therefore Y \sim N(L, (0.0036L)^2)$$

Μας ζητείται η πιθανότητα

$$P(|Y-L| \leq 0.005L) = P(-0.005L \leq Y-L \leq 0.005L)$$

$$= P\left(\frac{-0.005L}{0.0036L} \leq \frac{Y-L}{0.0036L} \leq \frac{0.005L}{0.0036L}\right)$$

$$= P(-1.3868 \leq \frac{Y-L}{0.0036L} \leq 1.3868)$$

$$= \Phi(1.3868) - \Phi(-1.3868) = \underline{\underline{2\Phi(1.3868) - 1}}$$

$$(8) \quad P(X > Y) = c \cdot E_{\text{μισοκύκλου}} = \frac{1}{\pi} \pi r^2 / 2 = \frac{1}{2} = 0.5 //$$

(5)

(8) Χρησιμοποιήστε τη δεδομένη β.π.π. $f_{Y|X}(y|x)$ για $x=2.2$

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} =$$

$$= \frac{1/\pi}{\frac{2}{\pi} \sqrt{1-(x-2)^2}} = \frac{1}{2 \sqrt{1-(x-2)^2}}$$

$$\therefore f_{Y|X}(y|x) = \frac{1}{2 \sqrt{1-(x-2)^2}} ; 2 - \sqrt{1-(x-2)^2} \leq y \leq 2 + \sqrt{1-(x-2)^2}$$

Δηλαδή, δεδομένου του $\{X=x\}$, η τ.τ. Y είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη στο διάστημα $[2 - \sqrt{1-(x-2)^2}, 2 + \sqrt{1-(x-2)^2}]$:

$$Y|_{X=x} \sim U[2 - \sqrt{1-(x-2)^2}, 2 + \sqrt{1-(x-2)^2}]$$

$$\Gamma_1 a \quad x=2.2, \quad f_{Y|X}(y|2.2) = \frac{1}{2 \sqrt{1-(2.2-2)^2}} = 0.5103; 1.02 \leq y \leq 2.98$$

$$\text{Συνεπώς, } P(1.5 < Y < 2.5 | X=2.2) = \int_{1.5}^{2.5} f_{Y|X}(y|2.2) dy$$

$$= 0.5103 \cdot y \Big|_{1.5}^{2.5} = \underline{\underline{0.5103}}$$