

Πανεπιστήμιο Κρήτης - Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών
Θεωρία Πιθανοτήτων - Τελική Εξέταση
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης
27 Ιανουαρίου 2022 - Διάρκεια: 2.5 Ώρες

Θέμα 1 - 25 μονάδες. Μία συνεχής τυχαία μεταβλητή (τ.μ.) X έχει την ακόλουθη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.)

$$f_X(x) = \begin{cases} e^x & -\infty < x < -1, \\ c & -1 \leq x \leq 1, \\ e^{-x} & 1 < x < +\infty \end{cases}$$

- (α) Να δώσετε τη γραφική παράσταση της σ.π.π. και να υπολογίσετε την τιμή της σταθεράς c .
(β) Υπολογίστε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής (α.σ.κ.) της τ.μ. X και δώστε την γραφική της παράσταση.
(γ) Υπολογίστε την πιθανότητα $P(-0.5 \leq X \leq 2)$.

Θέμα 2 - 25 μονάδες. Ένας μικροεπεξεργαστής είναι δυνατό να προέρχεται από το εργοστάσιο της Intel στην Malaysia ή στο Vietnam με την ίδια πιθανότητα. Αν προέρχεται από το εργοστάσιο της Malaysia, τότε η πιθανότητα λειτουργίας για το πολύ χρόνο t είναι $1 - e^{-at}$, αν όμως προέρχεται από το εργοστάσιο του Vietnam η αντίστοιχη πιθανότητα είναι $1 - e^{-bt}$.

- (α) Υπολογίστε τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του χρόνου ζωής, T , του μικροεπεξεργαστή.
(β) Ποια είναι η πιθανότητα να προέρχεται από το Vietnam δεδομένου ότι ο χρόνος ζωής του είναι μεγαλύτερος του t_1 και μικρότερος του t_2 ($t_1 < t_2$).

Θέμα 3 - 25 μονάδες.

(α) Δύο όργανα χρησιμοποιούνται για τη μέτρηση της απόστασης μεταξύ δύο σημείων. Η πραγματική απόσταση είναι L . Το σφάλμα μέτρησης ενός οργάνου ορίζεται ως η μέτρηση του οργάνου μείον την πραγματική τιμή της ποσότητας. Το σφάλμα μέτρησης του πρώτου οργάνου ακολουθεί Γκαουσιανή κατανομή με μέση τιμή 0 και τυπική απόκλιση $0.006L$, ενώ το σφάλμα μέτρησης του δεύτερου οργάνου ακολουθεί Γκαουσιανή κατανομή με μέση τιμή 0 και τυπική απόκλιση $0.004L$. Οι δύο μετρήσεις είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Υπολογίστε την πιθανότητα ότι ο μέσος όρος των δύο μετρήσεων βρίσκεται εντός $\pm 0.5\%$ γύρω από την πραγματική απόσταση. Εκφράστε την απάντησή σας βάσει τιμών της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής της τυπικής Γκαουσιανής, $\Phi(u)$.

(β) Οι τ.μ. X και Y είναι ανεξάρτητες και όμοια κατανεμημένες (i.i.d.) Υπολογίστε το συντελεστή συσχέτισης των τ.μ. $Z = aX + bY$ και $W = aX - bY$, όπου a και b δύο σταθερές.

Θέμα 4 - 25 μονάδες. Οι συνεχείς τ.μ. X και Y έχουν από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c & 1 \leq x \leq 3, \ y \geq 1, \ (x-2)^2 + (y-2)^2 \leq 1, \\ 0 & \text{αλλού.} \end{cases}$$

- (α) Δώστε τη γραφική παράσταση της από κοινού σ.π.π. και υπολογίστε τη σταθερά c .
(β) Υπολογίστε την περιθωριακή σ.π.π., $f_X(x)$, της τ.μ. X .
(γ) Υπολογίστε την πιθανότητα $P(X > Y)$.
(δ) Υπολογίστε την δεσμευμένη πιθανότητα $P(1.5 < Y < 2.5 | X = 2.2)$.