

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

HY-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2021
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Bonus Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 22/12/2021

Ημερομηνία Παράδοσης: 14/1/2022

Οδηγίες: Στα πλαίσια αυτής της **προγραμματιστικής** άσκησης θα πρέπει να παραδώσετε ένα συμπίεμένο αρχείο (.rar, .zip κτλ.) το οποίο θα περιλαμβάνει όλα τα αρχεία πηγαίου κώδικα (.m, .py) που έχετε υλοποιήσει, καθώς και το PDF της αναφοράς σας. Συμπεριλάβετε στο όνομα του αρχείου και στην αναφορά σας το ονοματεπώνυμό σας, τον ΑΜ σας και το τμήμα σας. **Δε χρειάζεται να λύσετε τίποτα στο χαρτί, εκτός αν σας ζητείται.** Σε περίπτωση αντιγραφής (μικρής ή μεγάλης εμβέλειας) ολόκληρη η bonus άσκηση θα μηδενίζεται, για όλους τους εμπλεκόμενους. Η υλοποίησή σας μπορεί να γίνει είτε με τη χρήση MATLAB (συνιστώμενη) είτε με τη χρήση Python (βιβλιοθήκες numpy, scipy). Η παράδοση της άσκησης θα γίνει ηλεκτρονικά, **ΑΠΟΚΛΕΙΣΤΙΚΑ** μέσω της σελίδας e-learn του μαθήματος. Καλή επιτυχία και καλές γιορτές!

Άσκηση 1.

Η Αρσινόη και ο Περικλής παίζουν κορώνα γράμματα με ένα δίκαιο νόμισμα. Έπειτα από κάθε ρίψη, ο χαμένος δίνει στο νικητή ένα ευρώ. Θεωρώντας ότι ο Περικλής ποντάρει συνεχώς στην επιλογή της κορώνας, προσομοιώστε αυτό το παιχνίδι χρησιμοποιώντας τις κατάλληλες συναρτήσεις του προγραμματιστικού περιβάλλοντος της επιλογής σας (MATLAB: rand, randi - Python: numpy.random.rand, numpy.random.randint). Πιο συγκεκριμένα:

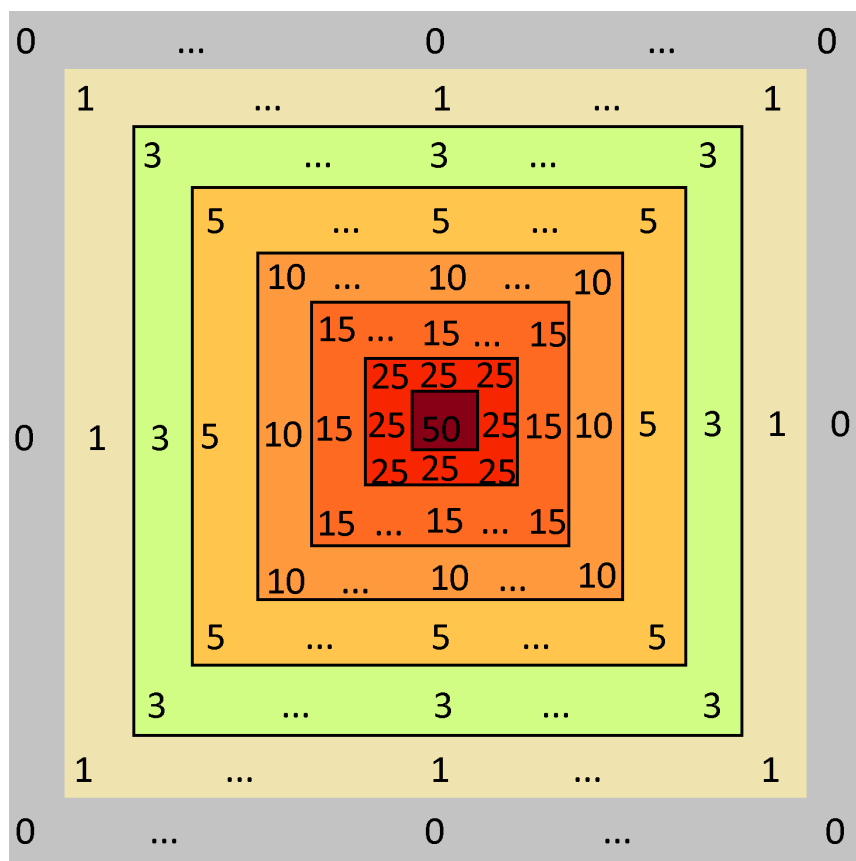
- (α) Έστω n το πλήθος των ρίψεων. Για όλα τα διαφορετικά n στο διάστημα $[1, 5000]$ υπολογίστε το κέρδος (ή τη ζημία) για κάθε παίκτη και σχεδιάστε το αντίστοιχο γράφημα του κέρδους (ή της ζημίας) συναρτήσει του αριθμού των ρίψεων. Σχολιάστε στην αναφορά σας τι παρατηρείτε.
- (β) Έστω ότι ο Περικλής ανταλλάσει στα κρυφά το αρχικό νόμισμα με ένα πειραγμένο που φέρνει κορώνα με πιθανότητα 0.75. Επαναλάβετε τα ζητούμενα του ερωτήματος (α).

Άσκηση 2.

Στον τοίχο του σπιτιού σας έχετε κρεμασμένο έναν τετράγωνο στόχο μεγέθους 15×15 , όπως αυτόν του παρακάτω σχήματος, και κρατάτε στο χέρι σας 6 βελάκια. Οι τιμές που αναγράφονται στο σχήμα αντιστοιχούν στους πόντους που θα κερδίσετε εάν πετάξετε και καρφώσετε ένα βελάκι εντός των αντίστοιχων ορίων. Κάθε γύρος του παιχνιδιού τελειώνει όταν έχετε πετάξει και τα 6 βελάκια. Στο τέλος κάθε γύρου μετράτε το σκορ που έχετε πετύχει, μαζεύετε τα βελάκια και το σκόρ ξεκινάει ξανά από το 0. Η πιθανότητα να πετύχετε με κάποιο βελάκι ένα συγκεκριμένο κελί με συντεταγμένες (x, y) , όπου $1 \leq x \leq 15$ και $1 \leq y \leq 15$, είναι ίδια για όλα τα κελιά. Επίσης, η πιθανότητα να μην πετύχετε κάποιο από τα κελιά του στόχου είναι ίση με το 0.

Προσομοιώστε στο προγραμματιστικό περιβάλλον της επιλογής σας 10000 γύρους του παραπάνω παιχνιδιού και απαντήστε στα παρακάτω ερωτήματα, αποκλειστικά και μόνο από τα αποτελέσματα που θα προκύψουν (αξιοποιήστε κατάλληλα τη μέθοδο της σχετικής συχνότητας/εκ των υστέρων ορισμό πιθανότητας):

- (α) Προσεγγίστε πειραματικά την πιθανότητα ένα βελάκι να πέσει μέσα στο τετράγωνο των 50 πόντων. Σχολιάστε στην αναφορά σας αν αυτή η προσεγγιστική πιθανότητα παίρνει την τιμή που θα περιμένατε.
- (β) Προσεγγίστε πειραματικά την πιθανότητα ένα βελάκι να πέσει σε κάποιο κελί των 5 πόντων. Σχολιάστε στην αναφορά σας αν αυτή η προσεγγιστική πιθανότητα παίρνει την τιμή που θα περιμένατε.
- (γ) Προσεγγίστε πειραματικά την πιθανότητα σε ένα γύρο να κερδίσετε περισσότερους από 200 πόντους.
- (δ) Προσεγγίστε πειραματικά την πιθανότητα σε ένα γύρο να κερδίσετε λιγότερους από 50 πόντους.
- (ε) Προσεγγίστε πειραματικά την πιθανότητα σε ένα γύρο να κερδίσετε ακριβώς 100 πόντους.
- (στ) Σχεδιάστε δύο ιστογράμματα, ένα για τις διάφορες τιμές πόντων που πετυχαίνετε στο σύνολο των 10000 γύρων και ένα για τα διαφορετικά σκορ που επιτυγχάνετε σε κάθε γύρο. Σχολιάστε στην αναφορά σας τα δύο ιστογράμματα. (Χρήσιμες συναρτήσεις: MATLAB: histogram - Python: numpy.histogram)



Άσκηση 3.

Συμμετέχετε σε ένα τηλεπαιχνίδι και σας ζητείται να επιλέξετε μία από τρεις πιθανές κλειστές πόρτες. Πίσω από τη μία πόρτα βρίσκεται μία ακριβή Ferrari, ενώ πίσω από τις άλλες δύο βρίσκονται φυλλάδια έξτρα υποχρεωτικών ασκήσεων στο μάθημα των Πιθανοτήτων! Ο παρουσιαστής σας ζητά να επιλέξετε μία από τις τρεις πόρτες (ας πούμε ότι επιλέγετε την πόρτα Α) και αφού επιλέξετε ανοίγει μία από τις υπόλοιπες δύο (ας πούμε ότι ανοίγει την πόρτα Β και αφήνει κλειστή

την πόρτα Γ), αποκαλύπτωντας το ένα από τα δύο φυλλάδια των Πιθανοτήτων. Πλέον, έχουν μείνει δύο κλειστές πόρτες, αυτή που επιλέξατε και η πόρτα Γ. Προτού αποκαλύψει το περιεχόμενο των δύο κλειστών πορτών, φανερώνοντας αν όντως έχετε κερδίσει τη Ferrari ή όχι, ο παρουσιαστής σας δίνει τη δυνατότητα να αλλάξετε την αρχική σας επιλογή (Α) και να διαλέξετε την άλλη κλειστή πόρτα (Γ). Χωρίς να υλοποιήσετε κάτι προγραμματιστικά, επιλέξτε στην αναφορά σας μία από τις παρακάτω στρατηγικές δίνοντας μία διαισθητική αιτιολόγηση:

- (1) Έχω περισσότερες πιθανότητες να κερδίσω αν αλλάξω από την πόρτα Α στην πόρτα Γ.
- (2) Έχω περισσότερες πιθανότητες να κερδίσω αν διατηρήσω την αρχική μου επιλογή και κρατήσω την πόρτα Α.
- (3) Είτε κρατήσω την πόρτα Α, είτε την αλλάξω με τη Γ, η πιθανότητα να κερδίσω παραμένει ίδια.

Στη συνέχεια, γράψτε ένα πρόγραμμα που θα εξομοιώνει 1000 φορές το παραπάνω παιχνίδι ως εξής:

- (i) Ως οργανωτής του παιχνιδιού, διαλέξτε τυχαία και ομοιόμορφα ποια από τις τρεις πόρτες θα είναι η πόρτα που κρύβει τη Ferrari.
- (ii) Ως παίκτης, επιλέξτε τυχαία και ομοιόμορφα μία από τις τρεις πόρτες (προφανώς χωρίς να λάβετε υπόψη σας το αποτέλεσμα του (i)).
- (iii) Ως παρουσιαστής, αποκαλύψτε μία από τις πόρτες που δεν έχει επιλεγεί από τον παίκτη και ταυτόχρονα δεν περιλαμβάνει από πίσω της τη Ferrari.
- (iv) Τέλος, αποφανθείτε αν θα κερδίζατε τη Ferrari διατηρώντας την αρχική σας επιλογή ή αλλάζοντας την αρχική σας πόρτα.

Για τις 1000 επαναλήψεις που έχετε εκτελέσει το παραπάνω πείραμα, υπολογίστε τη σχετική συχνότητα να κερδίσετε τη Ferrari αν επιμένετε στην αρχική σας επιλογή και τη σχετική συχνότητα να κερδίσετε τη Ferrari αν τελικά αλλάξετε πόρτα. Σχολιάστε αναλόγως στην αναφορά σας. Συνάδει το αποτέλεσμα που υπολογίσατε με την διαισθητική απάντηση που δώσατε στην αρχή; Μπορείτε να αιτολογήσετε γιατί η στρατηγική που τελικά εμφανίζεται ως καλύτερη είναι όντως η καλύτερη;

Άσκηση 4.

Ένα χρονικό δείγμα της εξόδου ενός μικροφώνου μοντελοποιείται ως μια Γκαουσιανή τ.μ. με μηδενική μέση τιμή και τυπική απόκλιση 5 Volts. Η έξοδος του μικροφώνου δίνεται σαν είσοδος σε έναν ενισχυτή ήχου. Για να αποφευχθεί η υπερφόρτωση της εισόδου του ενισχυτή, χρησιμοποιείται κόφτης της μορφής:

$$Y = c(X) = \begin{cases} X, & |X| \leq 10 \\ -10, & X < -10 \\ 10, & X > 10 \end{cases}$$

- (α) Παράξτε $N = 10^3$ δείγματα των τ.μ. X και Y . Σχεδιάστε ένα ιστόγραμμα για την εκτίμηση της σ.π.π. της Y και συγκρίνετε στην αναφορά σας με τη θεωρητική σ.π.π. που δίνεται στην εκφώνηση. Επαναλάβετε ξανά για $N = 10^5$.
- (β) Θεωρήστε ότι θέλετε να παράξετε μία εκθετική τ.μ. Y , έχοντας πρόσβαση μόνο σε έναν ομοιόμορφο $[0,1]$ γεννήτορα τυχαίων αριθμών. Έστω X ομοιόμορφη $[0,1]$ τ.μ. Δείξτε με αναλυτικό τρόπο (στο χαρτί) ότι η $Y := -\frac{1}{\alpha} \ln(X)$ είναι εκθετική τυχαία μεταβλητή με μέση τιμή $\frac{1}{\alpha}$.
- (γ) Παράξτε $N = 10^3$ δείγματα της τ.μ. Y για $\alpha = 0.5$. Σχεδιάστε ένα ιστόγραμμα για την εκτίμηση της σ.π.π. της Y και συγκρίνετε στην αναφορά σας με τη θεωρητική σ.π.π. της εκθετικής κατανομής. Επαναλάβετε ξανά για $N = 10^5$.

(Χρήσιμες συναρτήσεις: MATLAB: histogram, rand - Python: numpy.histogram, numpy.random.randint)

Για την εκτίμηση σ.π.π. μέσω ιστογράμματος ίσως σας βοηθήσει ο παρακάτω κώδικας σε MATLAB:

```
miny = min(y);
maxy = max(y);
NumBins = 51;
h = hist(y, NumBins);
for k = 1:NumBins
    bincenters(k) = miny + ((maxy-miny)/NumBins) * (k-1/2);
end
h = h / sum(h); % normalize PDF estimate
plot(bincenters,h);
legend('Histogram PDF estimate');
```