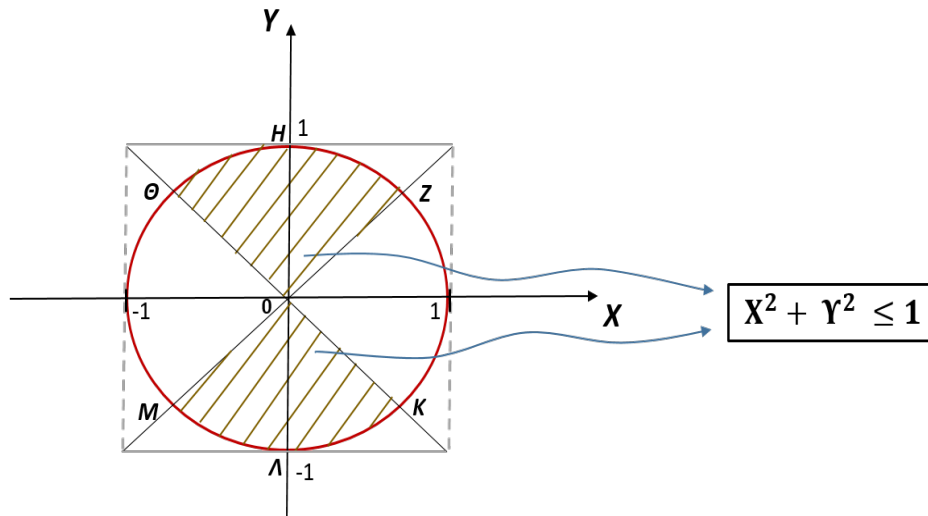


$$P(X^2+Y^2 \leq 1) = c \cdot E_{OZH\Theta} + c \cdot E_{OK\Lambda M} = c \cdot (E_{\text{μισού κύκλου ακτίνας 1}}) = c \cdot \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 1^2 = \frac{\pi}{4}$$



Σχήμα 2: Η ζητούμενη γραφική παράσταση στο ερώτημα 1 (γ).

Άσκηση 2

- (i) Για να αποτελεί η $f_{XY}(x, y)$ μία έγκυρη από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, θα πρέπει να ικανοποιεί την Συνθήκη Κανονικοποίησης:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x, y) dy dx &= 1 \Leftrightarrow \int_2^6 \int_0^5 [c(2x + y)] dy dx = 1 \Leftrightarrow c \int_2^6 \left(2x \left[y \right]_0^5 + \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^5 \right) dx = 1 \\ \Leftrightarrow c \int_2^6 \left(10x + \frac{25}{2} \right) &= 1 \Leftrightarrow c \left(10 \left[\frac{x^2}{2} \right]_2^6 + \frac{25}{2} \left[x \right]_2^6 \right) = 1 \Leftrightarrow c [10 \cdot 16 + \frac{25}{2} \cdot 4] = 1 \Leftrightarrow 210c = 1 \Leftrightarrow c = \frac{1}{210} \end{aligned}$$

Άρα, τελικά, η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, $f_{XY}(x, y)$, θα δίνεται από τον τύπο:

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{210}(2x + y) & 2 < x < 6, 0 < y < 5 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Σχεδιάζοντας τα επιτρεπτά πεδία τιμών των Τ.Μ. X, Y , λαμβάνουμε την γραφική παράσταση του συνόλου τιμών της από κοινού συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας (περιορισμένη στο διάστημα $[0, 7] \times [0, 6]$) που φαίνεται στο Σχήμα 3.

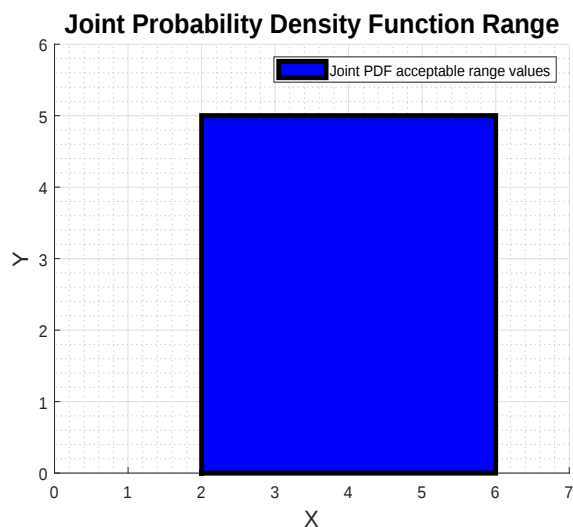
Κατ' αντιστοιχία, η γραφική παράσταση της μη-σταθερής από κοινού συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας, $f_{XY}(x, y)$, δίνεται στο Σχήμα 4.

- (ii) Με γνωστή την από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των X, Y , η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_X(x)$ δίνεται από τον εξής τύπο:

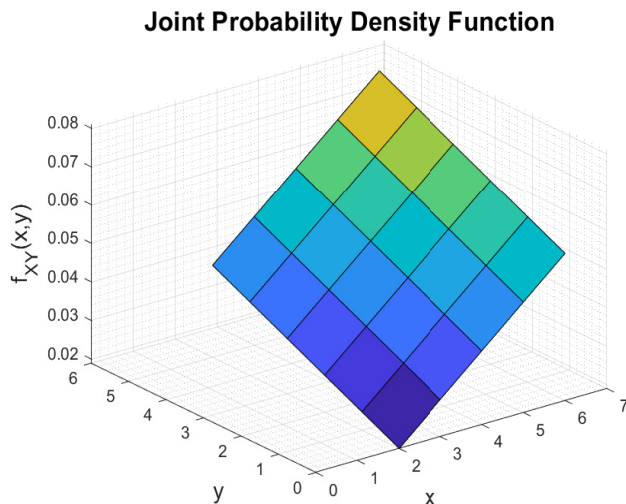
$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x, y) dy$$

Για $2 < x < 6$ έχουμε ότι:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x, y) dy = \int_0^5 \left(\frac{1}{210}(2x + y) \right) dy = \frac{1}{210} \left(2x \left[y \right]_0^5 + \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^5 \right) = \frac{1}{210} \left(10x + \frac{25}{2} \right)$$



Σχήμα 3: Σύνολο τιμών της από κοινού συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας $f_{XY}(x, y)$.



Σχήμα 4: Από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_{XY}(x, y)$.

Άρα, τελικά, η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, $f_X(x)$, θα δίνεται από τον τύπο:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{210}(10x + \frac{25}{2}) & 2 < x < 6 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Με γνωστή την από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των X, Y , η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_Y(y)$ δίνεται από τον εξής τύπο:

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x, y) dx$$

Για $0 < y < 5$ έχουμε ότι:

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x, y) dx = \int_2^6 \left(\frac{1}{210}(2x + y) \right) dx = \frac{1}{210} \left(2 \left[\frac{x^2}{2} \right]_2^6 + y \left[x \right]_2^6 \right) = \frac{1}{210}(32 + 4y)$$

Άρα, τελικά, η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, $f_Y(y)$, θα δίνεται από τον τύπο:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{210}(4y + 32) & 0 < y < 5 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

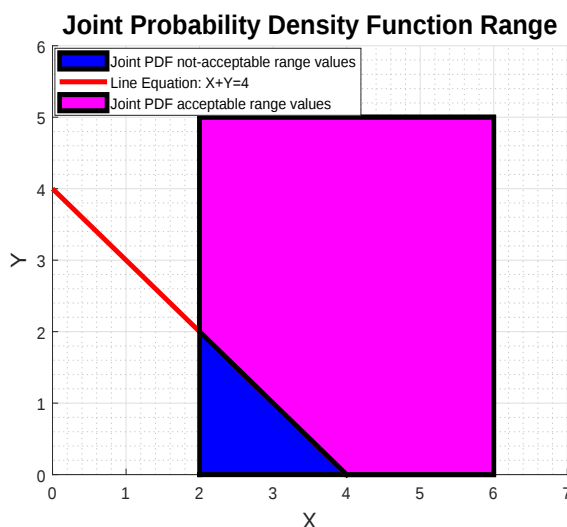
(iii) Για τον υπολογισμό της ζητούμενης πιθανότητας, κάνοντας χρήση των ιδιοτήτων της από κοινού συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας, έχουμε:

$$\begin{aligned} P(3 < X < 4, Y > 2) &= \int_3^4 \int_2^5 f_{XY}(x, y) dy dx = \int_3^4 \int_2^5 \left(\frac{1}{210}(2x + y) \right) dy dx \\ &= \frac{1}{210} \left[\int_3^4 \left(2x \left[y \right]_2^5 + \left[\frac{y^2}{2} \right]_2^5 \right) dx \right] = \frac{1}{210} \left[\int_3^4 \left(6x + \frac{21}{2} \right) dx \right] = \frac{1}{210} \left(6 \left[\frac{x^2}{2} \right]_3^4 + \frac{21}{2} \left[x \right]_3^4 \right) \\ &= \frac{1}{210} \left(6 \cdot \frac{7}{2} + \frac{21}{2} \right) = \frac{1}{210} \cdot \frac{63}{2} = \frac{63}{420} = \frac{3}{20} \end{aligned}$$

(iv) Για τον υπολογισμό της ζητούμενης πιθανότητας, κάνοντας χρήση των ιδιοτήτων της από κοινού συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας, έχουμε:

$$\begin{aligned} P(X > 3) &= \int_3^6 \int_0^5 f_{XY}(x, y) dy dx = \int_3^6 \int_0^5 \left(\frac{1}{210}(2x + y) \right) dy dx \\ &= \frac{1}{210} \left[\int_3^6 \left(2x \left[y \right]_0^5 + \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^5 \right) dx \right] = \frac{1}{210} \left[\int_3^6 \left(10x + \frac{25}{2} \right) dx \right] = \frac{1}{210} \left(10 \left[\frac{x^2}{2} \right]_3^6 + \frac{25}{2} \left[x \right]_3^6 \right) \\ &= \frac{1}{210} \left(10 \cdot \frac{27}{2} + 3 \cdot \frac{25}{2} \right) = \frac{1}{210} \cdot \frac{345}{2} = \frac{345}{420} = \frac{23}{28} \end{aligned}$$

(v) Για τον υπολογισμό της ζητούμενης πιθανότητας, με βάση το Σχήμα 5, έχουμε:



Σχήμα 5: Γραφικός υπολογισμός της $P(X + Y > 4)$.

$$\begin{aligned}
P(X+Y > 4) &= 1 - P(X+Y \leq 4) = 1 - \int_2^4 \int_0^{4-x} f_{XY}(x,y) dy dx = 1 - \int_2^4 \int_0^{4-x} \left(\frac{1}{210}(2x+y) \right) dy dx \\
&= 1 - \frac{1}{210} \left[\int_2^4 \left(2x \left[y \right]_0^{4-x} + \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^{4-x} \right) dx \right] = 1 - \frac{1}{210} \left[\int_2^4 \left(2x(4-x) + \frac{(4-x)^2}{2} \right) dx \right] \\
&= 1 - \frac{1}{210} \left[\int_2^4 \left(8x - 2x^2 + \frac{x^2 - 8x + 16}{2} \right) dx \right] = 1 - \frac{1}{210} \left[\int_2^4 \left(8x - 2x^2 + \frac{1}{2}x^2 - 4x + 8 \right) dx \right] \\
&= 1 - \frac{1}{210} \left[\int_2^4 \left(-\frac{3}{2}x^2 + 4x + 8 \right) dx \right] = 1 - \frac{1}{210} \left(-\frac{3}{2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_2^4 + 4 \left[\frac{x^2}{2} \right]_2^4 + 8 \left[x \right]_2^4 \right) \\
&= 1 - \frac{1}{210} \left(-\frac{3}{2} \cdot \frac{56}{3} + 4 \cdot \frac{12}{2} + 8 \cdot 2 \right) = 1 - \frac{1}{210} (-28 + 24 + 16) = 1 - \frac{1}{210} \cdot 12 = \frac{198}{210} = \frac{33}{35}
\end{aligned}$$

(vi) Παρατηρούμε ότι εν προκειμένω ισχύει η σχέση:

$$f(x, y) \neq f_X(x)f_Y(y)$$

Ως εκ τούτου, οι Τ.Μ. X, Y δεν είναι ανεξάρτητες.

Άσκηση 3

- (i) Από την θεωρία γνωρίζουμε ως όταν η συνεχής Τ.Μ. X ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[a, b]$, η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σππ) (pdf) αυτής θα δίνεται από τον παρακάτω τύπο:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Με βάση την εκφώνηση της Άσκησης, προκύπτει ότι:

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$$

Άρα, η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σππ) (pdf) θα είναι τελικά:

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας της X , $f_X(x)$, φαίνεται στο Σχήμα 6 (περιορισμένη στο διάστημα $[-5, 5]$).

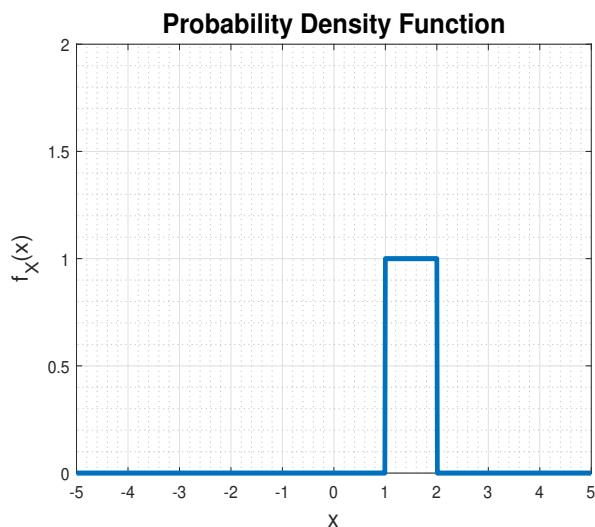
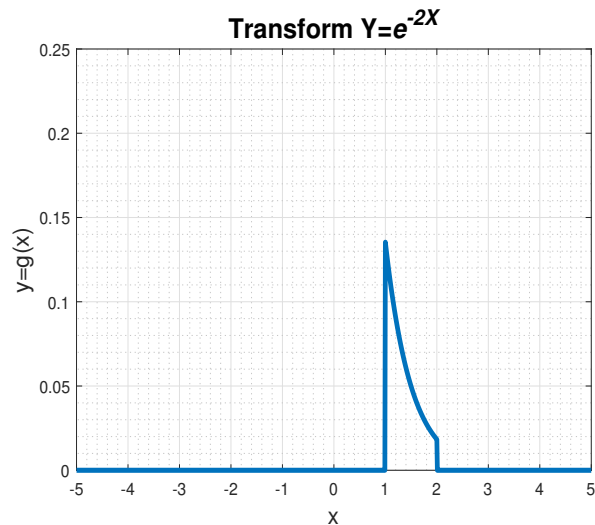
Η γραφική παράσταση του μετασχηματισμού $Y = g(X)$ φαίνεται στο Σχήμα 7 (περιορισμένη στο διάστημα $[-5, 5]$).

- (ii) Από το Σχήμα 4 βλέπουμε ότι η Τ.Μ X παίρνει τιμές στο διάστημα $[e^{-4}, e^{-2}] = [0.019448, 0.13534]$. Άρα, θεωρούμε τις εξής περιπτώσεις:

(a) Για $y < e^{-4}$, έχουμε:

$$F_Y(y) = 0$$

(b) Για $e^{-4} \leq y < e^{-2}$, έχουμε:

Σχήμα 6: Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_X(x)$.Σχήμα 7: Μετασχηματισμός $Y = g(X)$.

$$F_Y(y) = P(Y < y) = P(e^{-2X} < y) = P(-2X < \ln y) = P(X > -\frac{1}{2} \ln y) = \int_{-\frac{1}{2} \ln y}^{+\infty} 1 dx = \int_{-\frac{1}{2} \ln y}^2 1 dx = [x]_{-\frac{1}{2} \ln y}^2 = 2 + \frac{1}{2} \ln y$$

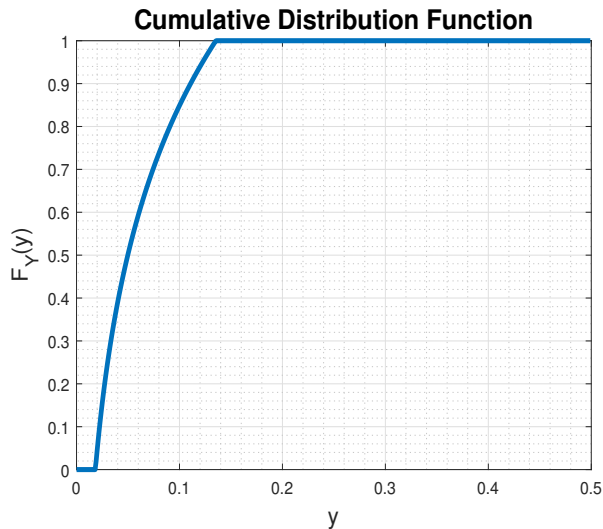
(c) Για $y > e^{-2}$, έχουμε:

$$F_Y(y) = 1$$

Άρα, η αθροιστική συνάρτηση κατανομής της Τ.Μ. Y , $F_Y(y)$, θα είναι τελικά:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y < e^{-4} \\ 2 + \frac{1}{2} \ln y & e^{-4} \leq y < e^{-2} \\ 1 & y > e^{-2} \end{cases}$$

Σχεδιάζοντας κάθε κλάδο της $F_Y(y)$ στα αντίστοιχα διαστήματα, λαμβάνουμε την γραφική παράσταση (περιορισμένη στο διάστημα $[0, 0.5]$) που φαίνεται στο Σχήμα 8.



Σχήμα 8: Αθροιστική συνάρτηση κατανομής $F_Y(y)$.

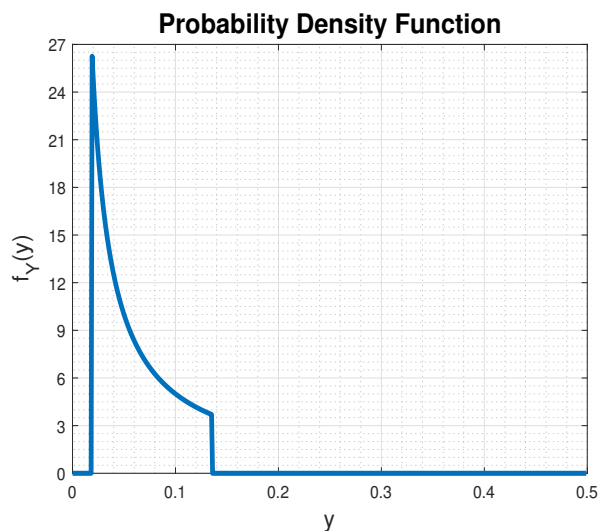
- (iii) Με γνωστή την αθροιστική συνάρτηση κατανομής, η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας δίνεται από τον εξής τύπο:

$$f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy}$$

Με βάση την δοσμένη αθροιστική συνάρτηση κατανομής, έχουμε:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2y} & e^{-4} \leq y < e^{-2} \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Σχεδιάζοντας κάθε κλάδο της $f_Y(y)$ στα αντίστοιχα διαστήματα, λαμβάνουμε την γραφική παράσταση (περιορισμένη στο διάστημα $[0, 0.5]$) που φαίνεται στο Σχήμα 9.



Σχήμα 9: Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_Y(y)$.

(iv) Για τον υπολογισμό της ζητούμενης πιθανότητας, έχουμε:

$$P(Y \leq e^{-3}) = F_Y(e^{-3}) = 2 + \frac{1}{2} \ln(e^{-3}) = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2} = 0.5$$

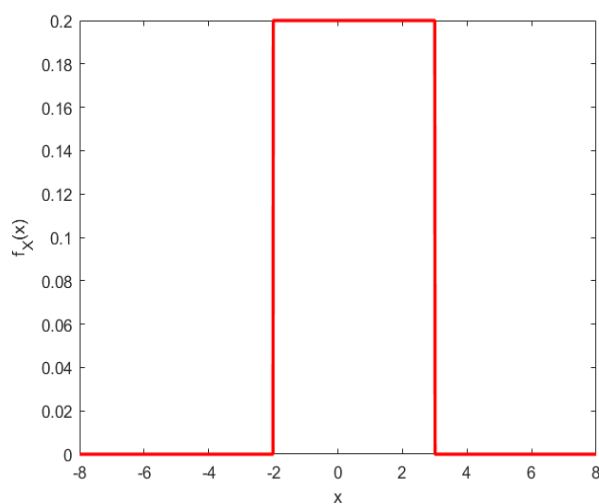
Άσκηση 4

(i) Καθώς $X \sim U[a, b]$, $E[X] = \frac{a+b}{2} = \frac{4}{8}$, $\text{var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{25}{12}$

Λύνοντας, έχουμε ότι $a = -2$ και $b = 3$. Άρα:

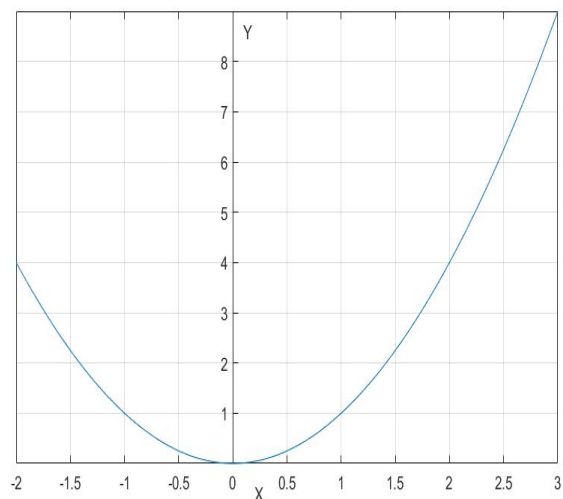
$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{5} & -2 \leq x < 3 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Η γραφική παράσταση της $f_X(x)$ φαίνεται στο Σχήμα 10.



Σχήμα 10: Γραφική παράσταση σ.π.π. $f_X(x)$.

(ii) Η Y παίρνει τιμές στο διάστημα $[0, 9]$.



Σχήμα 11: Γραφική παράσταση μετασχηματισμού.

(iii) Για $y < 0$, $F_Y(y) = 0$.

Για $y \geq 0$, $F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y) = P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y})$

Παίρνουμε περιπτώσεις για $y \geq 0$:

- $0 \leq \sqrt{y} \leq 2 \Rightarrow -2 \leq -\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y} \leq 2 \Rightarrow$

$$F_Y(y) = \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f_X(x) dx = \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} 0.2 dx = 0.4\sqrt{y}$$

- $2 < \sqrt{y} \leq 3 \Rightarrow -\sqrt{y} < -2 \leq X \leq \sqrt{y} \leq 3 \Rightarrow$

$$F_Y(y) = \int_{-2}^{\sqrt{y}} f_X(x) dx = \int_{-2}^{\sqrt{y}} 0.2 = 0.2\sqrt{y} + 0.4$$

- $y > 9 \Rightarrow F_Y(y) = 1$

Τελικά:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \leq 0 \\ 0.4\sqrt{y} & 0 < y \leq 4 \\ 0.2\sqrt{y} + 0.4 & 4 < y \leq 9 \\ 1 & y > 9 \end{cases}$$

και

$$f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = \begin{cases} \frac{0.2}{\sqrt{y}} & 0 < y \leq 4 \\ \frac{0.1}{\sqrt{y}} & 4 < y \leq 9 \end{cases}$$

Άσκηση 5 Εφόσον οι W, X, Y, Z είναι ασυσχέτιστες ανά ζεύγη, έχουμε:

$$COV(W, X) = 0 \Rightarrow E[WX] - E[W]E[X] = 0 \Rightarrow E[WX] = E[W]E[X].$$

$$COV(W, Y) = 0 \Rightarrow E[WY] - E[W]E[Y] = 0 \Rightarrow E[WY] = E[W]E[Y].$$

$$COV(W, Z) = 0 \Rightarrow E[WZ] - E[W]E[Z] = 0 \Rightarrow E[WZ] = E[W]E[Z].$$

$$COV(X, Y) = 0 \Rightarrow E[XY] - E[X]E[Y] = 0 \Rightarrow E[XY] = E[X]E[Y].$$

$$COV(X, Z) = 0 \Rightarrow E[XZ] - E[X]E[Z] = 0 \Rightarrow E[XZ] = E[X]E[Z].$$

$$COV(Y, Z) = 0 \Rightarrow E[YZ] - E[Y]E[Z] = 0 \Rightarrow E[YZ] = E[Y]E[Z].$$

Με βάση τον ορισμό του συντελεστή συσχέτισης των A και B , έχουμε:

$$\rho(A, B) = \frac{COV(A, B)}{\sqrt{VAR[A]VAR[B]}}.$$

Για τον υπολογισμό της συνδιασποράς των A και B , έχουμε:

$$\begin{aligned} COV(A, B) &= E[AB] - E[A]E[B] = E[(W + X)(X + Y)] - E[W + X]E[X + Y] \\ &= E[WX + WY + X^2 + XY] - (E[W] + E[X])(E[X] + E[Y]) = \\ &= E[WX] + E[WY] + E[X^2] + E[XY] - (0 + 0)(0 + 0) \\ &= E[W]E[X] + E[W]E[Y] + E[X^2] + E[X]E[Y] \\ &= 0 \times 0 + 0 \times 0 + E[X^2] + 0 \times 0 \\ &= E[X^2] = VAR[X] + (E[X])^2 = 1 + 0^2 = 1. \end{aligned}$$

Για τον υπολογισμό της διασποράς των A και B , έχουμε:

$$\begin{aligned} VAR[A] &= VAR[W + X] = VAR[W] - 2COV(W, X) + VAR[X] = 1 - 2 \times 0 + 1 = 2. \\ VAR[B] &= VAR[X + Y] = VAR[X] - 2COV(X, Y) + VAR[Y] = 1 - 2 \times 0 + 1 = 2. \end{aligned}$$

Ως εκ τούτου, ο συντελεστής συσχέτισης των A και B θα είναι τελικά:

$$\rho(A, B) = \frac{COV(A, B)}{\sqrt{VAR[A]VAR[B]}} = \frac{1}{\sqrt{2 \times 2}} = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}.$$

Ακολουθώντας το ίδιο σκεπτικό, με βάση τον ορισμό του συντελεστή συσχέτισης των A και C , έχουμε:

$$\rho(A, C) = \frac{COV(A, C)}{\sqrt{VAR[A]VAR[C]}}.$$

Για τον υπολογισμό της συνδιασποράς των A και C , έχουμε:

$$\begin{aligned} COV(A, C) &= E[AC] - E[A]E[C] = E[(W + X)(Y + Z)] - E[W + X]E[Y + Z] \\ &= E[WY + WZ + XY + XZ] - (E[W] + E[X])(E[Y] + E[Z]) = \\ &= E[WY] + E[WZ] + E[XY] + E[XZ] - (0 + 0)(0 + 0) \\ &= E[W]E[Y] + E[W]E[Z] + E[X]E[Y] + E[X]E[Z] \\ &= 0 \times 0 + 0 \times 0 + 0 \times 0 + 0 \times 0 = 0. \end{aligned}$$

Για τον υπολογισμό της διασποράς των A και C , έχουμε:

$$\begin{aligned} VAR[A] &= VAR[W + X] = VAR[W] - 2COV(W, X) + VAR[X] = 1 - 2 \times 0 + 1 = 2. \\ VAR[C] &= VAR[Y + Z] = VAR[Y] - 2COV(Y, Z) + VAR[Z] = 1 - 2 \times 0 + 1 = 2. \end{aligned}$$

Ως εκ τούτου, ο συντελεστής συσχέτισης των A και C θα είναι τελικά:

$$\rho(A, C) = \frac{COV(A, C)}{\sqrt{VAR[A]VAR[C]}} = \frac{0}{\sqrt{2 \times 2}} = \frac{0}{\sqrt{4}} = \frac{0}{2} = 0.$$

Άσκηση 6

(i) Αφού $Z = 2(X + Y)(X - Y) = 2(X^2 - Y^2)$, θα έχουμε:

$$E[Z] = 2(E[X^2] - E[Y^2]) = 2(Var(X) + E^2[X] - Var(Y) - E^2[Y]) = 2(4 + 1 - 9 - 4^2) = -40$$

(ii) Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} Cov(T, U) &= Cov(2X + Y, 2X - Y) = E[(2X + Y)(2X - Y)] - E[2X + Y]E[2X - Y] \\ &= E[4X^2 - Y^2] - (2E[X] + E[Y])(2E[X] - E[Y]) \\ &= 4E[X^2] - E[Y^2] - 4(E[X])^2 + 2E[X]E[Y] - 2E[X]E[Y] + (E[Y])^2 \\ &= 4(E[X^2] - (E[X])^2) - (E[Y^2] - (E[Y])^2) = 4Var(X) - Var(Y) = 4 \cdot 4 - 9 = 7 \end{aligned}$$

(iii) Είναι:

$$\begin{aligned} E[W] &= E[3X + Y + 2] = 3E[X] + E[Y] + 2 = 3 \cdot 1 + 4 + 2 = 9 \\ Var(W) &= Var(3X + Y + 2) = 9Var(X) + Var(Y) + 6Cov(X, Y) = 48.6 \end{aligned}$$

$$\text{όπου } Cov(X, Y) = \rho\sqrt{Var(X)Var(Y)} = 0.1\sqrt{4 \cdot 9} = 0.6.$$