

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

HY-217: Πιθανότητες-Χειμερινό Εξάμηνο 2021-2022
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Έκτη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 22/12/2021

Ημερομηνία Παράδοσης: 14/01/2022

ΣΗΜΑΝΤΙΚΕΣ ΟΔΗΓΙΕΣ

- Η παράδοση των ασκήσεών σας θα γίνεται ηλεκτρονικά, **ΑΠΟΚΛΕΙΣΤΙΚΑ** μέσω της σελίδας e-learn του μαθήματος, εδώ. Παραδόσεις με e-mail, ή οποιονδήποτε άλλον τρόπο δε θα γίνονται δεκτές και θα **μηδενίζονται**.
- Για την παράδοση, θα πρέπει να σκανάρετε ή να φωτογραφίσετε τις κόλλες των ασκήσεών σας και, στη συνέχεια, να φτιάξετε **ένα PDF** που θα περιλαμβάνει αυτές τις φωτογραφίες, δηλαδή το σύνολο της λυμένης σειράς ασκήσεων.
- Αριθμήστε τις σελίδες των ασκήσεών σας (από την άσκηση 1, στην άσκηση 2, στην άσκηση 3 κ.ο.κ.) και **ΣΙΓΟΥΡΕΥΤΕΙΤΕ** ότι τα σκαναρίσματα που έχετε κάνει έχουν δημιουργήσει εικόνες στις οποίες είναι **ΕΥΔΙΑΚΡΙΤΕΣ** και **ΕΥΚΟΛΟΔΙΑΒΑΣΤΕΣ** οι λύσεις σας. Θο-λές, και γενικότερα θορυβώδεις, εικόνες ενδέχεται να καταστήσουν αδύνατη τη διαδικασία της διόρθωσης και κατ' επέκταση να οδηγήσουν σε **μηδενισμό** των ασκήσεών σας.

Θέματα: Από Κοινού ΣΠΠ Πολλαπλών ΤΜ, Υπολογισμός ΣΠΠ της $Y = g(X)$, Συνδιασπορά και Συσχέτιση.

Άσκηση 1. Οι συνεχείς Τ.Μ. X και Y έχουν από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας που δίνεται από τον εξής τύπο:

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} c & 0 \leq |x| \leq |y|, 0 \leq |y| \leq 1 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

- Δώστε τη γραφική παράσταση της από κοινού σ.π.π. και υπολογίστε την σταθερά c .
- Υπολογίστε την περιθωριακή σ.π.π. της Τ.Μ. X , $f_X(x)$.
- Υπολογίστε την πιθανότητα $P(X^2 + Y^2 \leq 1)$.

Άσκηση 2. Θεωρούμε τις Τ.Μ. X και Y με από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας που δίνεται από τον εξής τύπο:

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} c(2x + y) & 2 < x < 6, 0 < y < 5 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

, όπου c σταθερά με $c \in \mathbb{R}$.

- Να βρεθεί η τιμή της σταθεράς c .
- Να βρεθούν οι περιθώριες συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας $f_X(x)$ και $f_Y(y)$.
- Να υπολογιστεί η πιθανότητα $P(3 < X < 4, Y > 2)$
- Να υπολογιστεί η πιθανότητα $P(X > 3)$

(v) Να υπολογιστεί η πιθανότητα $P(X + Y > 4)$

(vi) Είναι οι Τ.Μ. X και Y ανεξάρτητες;

Άσκηση 3. Θεωρούμε την Τ.Μ. X η οποία είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη μεταξύ των τιμών 1 και 2, δηλαδή: $X \sim U[1,2]$. Ορίζουμε μια νέα τυχαία μεταβλητή ως εξής: $Y = e^{-2X}$.

- (i) Να γίνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας της Τ.Μ X , $f_X(x)$, καθώς και αυτή του μετασχηματισμού $Y = e^{-2X}$.
- (ii) Να υπολογιστεί η αθροιστική συνάρτηση κατανομής της Τ.Μ. Y , $F_Y(y)$, και να γίνει η γραφική της παράσταση.
- (iii) Να υπολογιστεί η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της Τ.Μ. Y , $f_Y(y)$, και να γίνει η γραφική της παράσταση.
- (iv) Να υπολογιστεί η πιθανότητα $P(Y \leq e^{-3})$.

Άσκηση 4. Θεωρούμε τη συνεχή ομοιόμορφη τ.μ. X για την οποία γνωρίζουμε ότι $E[X] = -\frac{2}{4}$ και $\text{var}(X) = \frac{25}{12}$. Η Τ.Μ. είναι είσοδος σε ένα σύστημα εισόδου-εξόδου που δίνεται από τον μετασχηματισμό $Y = X^2$.

- (i) Να υπολογίσετε την αναλυτική έκφραση για την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.) της Τ.Μ. X , και να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση.
- (ii) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση του μετασχηματισμού $Y = X^2$, και να δώσετε το πεδίο τιμών της Τ.Μ. Y .
- (iii) Για την Τ.Μ. Y , να υπολογίσετε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής (α.σ.κ.), $F_Y(y)$, και την σ.π.π., $f_Y(y)$.

Άσκηση 5. Θεωρήστε 4 Τ.Μ. W, X, Y, Z , για τις οποίες ισχύουν:

$$E[W] = E[X] = E[Y] = E[Z] = 0$$

$$\text{VAR}[W] = \text{VAR}[X] = \text{VAR}[Y] = \text{VAR}[Z] = 1.$$

Επιπλέον, υποθέστε ότι οι W, X, Y, Z είναι ασυσχέτιστες ανά ζεύγη. Να υπολογιστούν οι συντελεστές συσχέτισης $\rho(A, B)$ και $\rho(A, C)$, όπου:

$$A = W + X, B = X + Y, C = Y + Z.$$

Άσκηση 6. Έστω X και Y τ.μ. με $E[X] = 1$, $E[Y] = 4$, $\text{var}(X) = 4$, $\text{var}(Y) = 9$, και συντελεστή συσχέτισης $\rho_{X,Y} = 0.1$.

- (i) Αν $Z = 2(X + Y)(X - Y)$, βρείτε την $E[Z]$.
- (ii) Αν $T = 2X + Y$ και $U = 2X - Y$, βρείτε την συνδιασπορά των τ.μ. T και U , $\text{cov}(T, U)$.
- (iii) Αν $W = 3X + Y + 2$, βρείτε τις $E[W]$ και $\text{var}(W)$.