

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2021-2022
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Πέμπτη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 08/12/2021

Ημερομηνία Παράδοσης: 21/12/2021

ΣΗΜΑΝΤΙΚΕΣ ΟΔΗΓΙΕΣ

- Η παράδοση των ασκήσεών σας θα γίνεται ηλεκτρονικά, **ΑΠΟΚΛΕΙΣΤΙΚΑ** μέσω της σελίδας e-learn του μαθήματος, **εδώ**. Παραδόσεις με e-mail, ή οποιονδήποτε άλλον τρόπο δε θα γίνονται δεκτές και θα **μηδενίζονται**.
- Για την παράδοση, θα πρέπει να σκανάρετε ή να φωτογραφίσετε τις κόλλες των ασκήσεών σας και, στη συνέχεια, να φτιάξετε **ένα PDF** που θα περιλαμβάνει αυτές τις φωτογραφίες, δηλαδή το σύνολο της λυμένης σειράς ασκήσεων.
- Αριθμήστε τις σελίδες των ασκήσεών σας (από την άσκηση 1, στην άσκηση 2, στην άσκηση 3 κ.ο.κ.) και **ΣΠΟΥΡΕΥΤΕΙΤΕ** ότι τα σκαναρίσματα που έχετε κάνει έχουν δημιουργήσει εικόνες στις οποίες είναι **ΕΥΔΙΑΚΡΙΤΕΣ** και **ΕΥΚΟΛΟΔΙΑΒΑΣΤΕΣ** οι λύσεις σας. Θολές, και γενικότερα θορυβώδεις, εικόνες ενδέχεται να καταστήσουν αδύνατη τη διαδικασία της διόρθωσης και κατ' επέκταση να οδηγήσουν σε **μηδενισμό** των ασκήσεών σας.

Άσκηση 1.

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής X δίνεται από τη σχέση:

$$f_X(x) = \begin{cases} 4(1-x)^3 & , \text{αν } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & , \text{αλλιώς} \end{cases}$$

- (α) Εξετάστε αν η παραπάνω συνάρτηση ικανοποιεί τις συνθήκες μίας συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας.
- (β) Υπολογίστε τη μέση τιμή και τη διασπορά της X .
- (γ) Υπολογίστε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής, $F_X(x)$, της X .
- (δ) Υπολογίστε την πιθανότητα $P(X = 0.6)$.
- (ε) Υπολογίστε την πιθανότητα $P\left(\frac{1}{3} < X \leq \frac{4}{3}\right)$.

Άσκηση 2.

Μια φιλανθρωπική οργάνωση μαζεύει χρήματα κάνοντας ανακύκλωση. Συγκεκριμένα, μαζεύουν ανακυκλώσιμα πλαστικά, τα συσκευάζουν σε πακέτα και μετά πουλάνε αυτά τα πακέτα σε εταιρείες. Όμως, επειδή δεν έχουν αρκετά άτομα για να γίνει διεξοδικός έλεγχος, σε κάθε πακέτο υπάρχει μια ποσότητα X από άλλα, 'ακατάλληλα' υλικά (πχ χαρτιά, γυαλιά κλπ). Η X μπορεί να θεωρηθεί ως μια συνεχής τ.μ. με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (ΣΠΠ):

$$f_X(x) = \begin{cases} \alpha(x-1)(3-x) & , \text{αν } 1 < x < 3 \\ 0 & , \text{αλλιώς} \end{cases}$$

- (α) Αποδείξτε ότι $\alpha = \frac{3}{4}$ και δώστε τη γραφική παράσταση της $f_X(x)$.
- (β) Υπολογίστε τη μέση τιμή και τη διασπορά της τ.μ. X .
- (γ) Υπολογίστε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής, $F_X(x)$, της X .

(δ) Υπολογίστε την πιθανότητα η X να ξεπερνάει την τιμή $\frac{5}{2}$.

(ε) Η συμφωνία που έχει κάνει η φιланθρωπική οργάνωση με τις εταιρείες είναι:

τα πακέτα με $X < \frac{3}{2}$ πωλούνται με τιμή 220 ευρώ, τα πακέτα με $X > \frac{5}{2}$ πωλούνται με τιμή 150 ευρώ και τα πακέτα με $\frac{3}{2} \leq X \leq \frac{5}{2}$ πωλούνται με τιμή 200 ευρώ. Υπολογίστε την εκτιμώμενη τιμή πώλησης ενός τυχαίου πακέτου σε μια εταιρεία.

Άσκηση 3.

Καθώς πλησιάζουν τα Χριστούγεννα και είστε σε γιορτινό mood, αποφασίζετε να στολίσετε το χριστουγεννιάτικο δέντρο σας με χριστουγεννιάτικα λαμπάκια. Η διάρκεια ζωής (σε μέρες) για καθένα από τα λαμπάκια ακολουθεί εκθετική κατανομή με παράμετρο $\lambda = 0.1$, ανεξάρτητα από τα άλλα λαμπάκια, δηλαδή έχει αθροιστική συνάρτηση κατανομής:

$$F_{Xi}(x) = \begin{cases} 1 - e^{-0.1x} & , \text{αν } x \geq 0 \\ 0 & , \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Έχετε πολύ μικρό χριστουγεννιάτικο δέντρο, οπότε η κορδέλα με τα λαμπάκια έχει 4 λαμπάκια. Επειδή όμως τα χριστουγεννιάτικα φωτάκια συνδέονται σε σειρά, όταν χαλάσει το 1ο, σταματάνε να λειτουργούν όλα μαζί. Έτσι, η διάρκεια ζωής για τα Χριστουγεννιάτικα φωτάκια μοντελοποιείται με την τ.μ. $X = \min\{X_1, X_2, X_3, X_4\}$.

(α) Υπολογίστε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής, $F_X(x)$ της τυχαίας μεταβλητής X .

(β) Υπολογίστε τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, $f_X(x)$ της τυχαίας μεταβλητής X .

(γ) Υπολογίστε την πιθανότητα τα χριστουγεννιάτικα φωτάκια να κρατήσουν το πολύ 4 μέρες.

Άσκηση 4.

(α) Δίνεται η τ.μ. $X \sim U[-5, 5]$, δηλαδή η X είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη στο διάστημα $[-5, 5]$. Υπολογίστε την πιθανότητα του γεγονότος $X^2 + X - 6 > 0$.

(β) Η ποσότητα του πετρελαίου που καίει ένας καυστήρας σε 24 ώρες μοντελοποιείται με μια κανονική τυχαία μεταβλητή με μέση τιμή $\mu = 200$ λίτρα και διασπορά $\sigma^2 = 400$, δηλαδή $X \sim N(200, 400)$. Αν υπάρχουν ακόμα 210 λίτρα στο ντεπόζιτο, ποια είναι η πιθανότητα να διαρκέσουν για 24 ώρες;

Άσκηση 5.

Μια εταιρεία κατασκευάζει και τοποθετεί ανελκυστήρες σε πολυκατοικίες. Η διάρκεια ζωής (σε χρόνια) αυτών των ανελκυστήρων μοντελοποιείται με μια εκθετική κατανομή X με μέση τιμή $E[X] = 5$ χρόνια.

(α) Ποια είναι η πιθανότητα ένας ανελκυστήρας να συνεχίζει να λειτουργεί ακόμα μετά από 6 χρόνια;

(β) Τι ποσοστό των ασανσέρ θα συνεχίζει να λειτουργεί για περισσότερο από 3, αλλά λιγότερο από 7 χρόνια;

(γ) Αν τα A και B είναι τα γεγονότα των ερωτημάτων (α) και (β) αντίστοιχα, είναι τα γεγονότα αυτά ανεξάρτητα;

(δ) Η εταιρεία δεσμεύεται να αντικαταστήσει το ασανσέρ αν παρουσιαστεί βλάβη σε διάστημα μικρότερο του χρόνου εγγύησης. Για πόσα χρόνια μπορεί να δίνει η εταιρεία εγγύηση, προκειμένου το ποσοστό των ανελκυστήρων που αντικαθιστά να είναι μικρότερο από 10%;

Άσκηση 6.

Εστω ότι η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί Γκαουσιανή κατανομή με μέση τιμή $\mu = -6$ και διασπορά $\sigma^2 = 9$, δηλαδή $X \sim N(-6, 9)$ και η τ.μ. Y ακολουθεί Γκαουσιανή κατανομή με μέση τιμή $\mu = 1$ και διασπορά $\sigma^2 = 4$, δηλαδή $Y \sim N(1, 4)$. Οι X, Y είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές. Να υπολογιστούν οι παρακάτω πιθανότητες:

(α) $P(X = -6)$

(β) $P(-4 < X < 2)$

(γ) $P(|Y| \geq \frac{5}{2})$

(δ) $P(X^2 + 8X + 15 < 0)$

(ε) Αν $Z = X + Y$, $P(Z < -4)$;

Hint: Χρησιμοποιήστε τις τιμές της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής της τυπικής Γκαουσιανής, $\Phi(x)$.

Άσκηση 7. - Προγραμματιστική

Ο τύπος της κανονικής κατανομής είναι:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

(α) Χρησιμοποιώντας τον παραπάνω τύπο, χωρίς δηλαδή τη χρήση έτοιμων συναρτήσεων των MATLAB/Python για την κανονική κατανομή, σχεδιάστε μια Γκαουσιανή κατανομή με μέση τιμή $\mu = 4$ και διασπορά $\sigma^2 = 1.4$, στο διάστημα $[-4, 12]$.

(β) Χρησιμοποιώντας αυτή τη φορά την έτοιμη συνάρτηση της κανονικής κατανομής, σχεδιάστε μία Γκαουσιανή κατανομή με $\mu = 0$ και $\sigma^2 = 1$, σε διάστημα της επιλογής σας. Διατηρώντας σταθερή τη μέση τιμή και αλλάζοντας τη διασπορά, σχεδιάστε σε ένα κοινό γράφημα την παραπάνω Γκαουσιανή, καθώς και τέσσερις ακόμα Γκαουσιανές με διαφορετικό σ^2 . Επαναλάβετε την ίδια διαδικασία διατηρώντας αυτή τη φορά σταθερή τη διασπορά και αλλάζοντας τη μέση τιμή. Σχολιάστε στην αναφορά σας τι συμπεραίνετε για τη 'φυσική' σημασία της μέσης τιμής και της διασποράς, βάσει των γραφημάτων που παράξατε.

Μαζί με τον κώδικά σας, παραδώστε τις εικόνες/διαγράμματα που παράξατε, καθώς και τα σχόλια στα ερωτήματα που έχουν τεθεί.

Χρήσιμες συναρτήσεις: (MATLAB: normpdf - Python: scipy.stats.norm)