

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

HY-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2021
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Λύσεις Τέταρτης Σειράς Ασκήσεων

Άσκηση 1.

- (α) Έστω X το πλήθος των φορών που ο Jeong Chin-Hae εντοπίζεται από τον εκάστοτε αντίπαλο. Έχουμε διωνυμική κατανομή με $n = 10$ και $p = 0.01$. Η ζητούμενη πιθανότητα είναι:
$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - P(X = 1) - P(X = 0) = 1 - \binom{10}{1} * 0.99^9 * 0.01^1 - 0.99^{10}.$$

Ο αναμενόμενος αριθμός αντιπάλων που θα τον εντοπίσουν είναι:
$$E[X] = n * p = 10 * 0.01 = 0.1,$$

ενώ η διασπορά ισούται με:
$$\text{Var}(X) = n * p * (1 - p) = 10 * 0.01 * 0.99 = 0.099.$$
- (β) Έστω X το πλήθος των φορών που ο Jeong Chin-Hae εντοπίζεται από τον εκάστοτε αντίπαλο. Έχουμε διωνυμική κατανομή με $n = 228$ και $p = 0.01$. Η ζητούμενη πιθανότητα είναι:
$$P(X \leq 2) = P(X = 2) + P(X = 1) + P(X = 0) = \binom{228}{2} * 0.99^{226} * 0.01^2 + \binom{228}{1} * 0.99^{227} * 0.01^1 + 0.99^{228}.$$

Για τον υπολογισμό της πιθανότητας ο πρώτος αντίπαλος που θα τον εντοπίσει να είναι ο αντίπαλος 100, ορίζουμε γεωμετρική τ.μ. Y με $p = 0.01$ και $k = 100$. Άρα:
$$P_Y(k = 100) = 0.99^{99} * 0.01.$$

Για τον υπολογισμό της πιθανότητας ο δεύτερος αντίπαλος που θα τον εντοπίσει να είναι ο αντίπαλος 200, ορίζουμε αρνητική διωνυμική τ.μ. Z με $p = 0.01$, $r = 2$ και $k = 200$. Άρα:
$$P_Z(k = 200) = \binom{199}{1} 0.01^2 * 0.99^{198}.$$
- (γ) Αφού γνωρίζουμε ότι ο Jeong Chin-Hae έχει κερδίσει τον τίτλο του "Kraken", τότε μπορούμε να αντιμετωπίσουμε τις υπόλοιπες προσπάθειες που του απομένουν (οι υπόλοιπες 228) σαν μία νέα διωνυμική κατανομή με $n = 228$ και $p = 0.01$. Τότε, η ζητούμενη πιθανότητα θα είναι η πιθανότητα εμφάνισης πρώτης "επιτυχίας" (γεωμετρική κατανομή) κατά την 228^η προσπάθεια, δηλαδή: $P(k = 228) = 0.99^{227} * 0.01$.

Άσκηση 2.

- (α)
$$E[(2 + X)^2] = E[X^2 + 4X + 4] = E[X^2] + 4E[X] + 4 = \text{Var}(X) + E[X]^2 + 4E[X] + 4 = 14$$

$$\text{Var}(4 + 3X) = \text{Var}(3X) = 9 * \text{Var}(X) = 45$$
- (β) Με $p_j = P(XYZ = j)$, έχουμε ότι $p_6 = p_2 = p_4 = p_{12} = 1/4$.
Έτσι, $E[XYZ] = (6 + 2 + 4 + 12)/4 = 6$.
- Με $q_j = P(XY + XZ + YZ = j)$, έχουμε ότι $q_{11} = q_5 = q_8 = q_{16} = 1/4$.
Έτσι, $E[XY + XZ + YZ] = (11 + 5 + 8 + 16)/4 = 10$.

Άσκηση 3.

(α) Ορίζουμε τις 2 διαδοχικές ρίψεις με W, Z αντίστοιχα. Τα 16 ισοπίθανα ζεύγη φαίνονται στον παρακάτω πίνακα (κάθε κελί περιέχει το ζεύγος (X, Y)).

	Z=1	Z=2	Z=3	Z=4
W = 1	(0,1)	(1,1)	(2,1)	(3,1)
W = 2	(1,1)	(1,2)	(2,2)	(3,2)
W = 3	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(3,3)
W = 4	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)

Από τον πίνακα μπορούμε να βρούμε τις συναρτήσεις πιθανότητας για τα X, Y .

$$p_X(k) = \begin{cases} \frac{1}{16}, & k = 0 \\ \frac{3}{16}, & k = 1 \\ \frac{5}{16}, & k = 2 \\ \frac{7}{16}, & k = 3 \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases}$$

$$p_Y(k) = \begin{cases} \frac{7}{16}, & k = 1 \\ \frac{5}{16}, & k = 2 \\ \frac{3}{16}, & k = 3 \\ \frac{1}{16}, & k = 4 \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases}$$

Ο πίνακας της από κοινού συνάρτησης πιθανότητας $p_{X,Y}(x, y)$ είναι:

	Υ=1	Υ=2	Υ=3	Υ=4
X = 0	1/16	0	0	0
X = 1	2/16	1/16	0	0
X = 2	2/16	2/16	1/16	0
X = 3	2/16	2/16	2/16	1/16

(β) Τώρα μπορούμε να υπολογίσουμε τις μέσες τιμές αντίστοιχα:

$$E[X] = \frac{1}{16} \cdot 0 + \frac{3}{16} \cdot 1 + \frac{5}{16} \cdot 2 + \frac{7}{16} \cdot 3 = \frac{17}{8},$$

$$E[Y] = \frac{7}{16} \cdot 1 + \frac{5}{16} \cdot 2 + \frac{3}{16} \cdot 3 + \frac{1}{16} \cdot 4 = \frac{15}{8}.$$

Από την γραμμικότητα της μέσης τιμής έχουμε ότι:

$$E[X - Y] = E[X] - E[Y] = \frac{1}{4}.$$

(γ) Από τις συναρτήσεις πιθανότητας στο (α) μπορούμε να υπολογίσουμε τα εξής:

$$E[X^2] = \frac{1}{16} \cdot 0^2 + \frac{3}{16} \cdot 1^2 + \frac{5}{16} \cdot 2^2 + \frac{7}{16} \cdot 3^2 = \frac{43}{8},$$

$$E[Y^2] = \frac{7}{16} \cdot 1^2 + \frac{5}{16} \cdot 2^2 + \frac{3}{16} \cdot 3^2 + \frac{1}{16} \cdot 4^2 = \frac{35}{8}.$$

$$\text{Άρα, } \text{Var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{55}{64} \text{ και } \text{Var}(Y) = E[Y^2] - (E[Y])^2 = \frac{55}{64}.$$

(δ) Η συνάρτηση πιθανότητας της Z είναι:

$$p_Z(k) = \begin{cases} \frac{4}{16}, & k = -1 \\ \frac{6}{16}, & k = 0 \\ \frac{4}{16}, & k = 1 \\ \frac{2}{16}, & k = 2 \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Επομένως } E[Z^2] &= \frac{4}{16} \cdot (-1)^2 + \frac{6}{16} \cdot 0^2 + \frac{4}{16} \cdot 1^2 + \frac{2}{16} \cdot 2^2 = 1, \text{ και} \\ \text{Var}(Z) &= E[Z^2] - (E[Z])^2 = 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{15}{16}. \end{aligned}$$

Άσκηση 4.

Η πιθανότητα που ζητάμε είναι:

$$\sum_{k=0}^2 \binom{5000}{k} (0.01)^k (0.99)^{5000-k}.$$

Εκτελούμε, δηλαδή, 5000 ανεξάρτητες δοκιμές Bernoulli με πιθανότητα "επιτυχίας" $p = 0.01$, θεωρώντας επιτυχία το γεγονός ότι το άτομο πιστεύει στην ύπαρξη του Candyman. Στην ουσία, ζητάμε την πιθανότητα το πλήθος των επιτυχιών να είναι το πολύ ίσο με 2 ($k = 0, 1, 2$). Επειδή το πλήθος των δοκιμών είναι σχετικά μεγάλο και η πιθανότητα επιτυχίας αρκετά μικρή, μπορούμε να προσεγγίσουμε τη διωνυμική κατανομή (5000, 0.01) με την κατανομή Poisson παραμέτρου $\lambda = 5000 \cdot (0.01) = 50$. Δηλαδή:

$$P = \sum_{k=0}^2 \frac{e^{-50}(50)^k}{k!} = e^{-50}(1 + 50 + 1250) = 1301 \cdot e^{-50}$$

Άσκηση 5.

(α) Από την κοινή σ.π., υπάρχουν 6 ζευγάρια συντεταγμένων (x, y) με μη μηδενική πιθανότητα εμφάνισης. Αυτά τα ζευγάρια είναι τα: $(1, 1), (1, 3), (2, 1), (2, 3), (4, 1)$ και $(4, 3)$. Η πιθανότητα ενός ζευγαριού είναι ανάλογη του γινομένου των x και y συντεταγμένων του ζευγαριού. Επειδή η πιθανότητα ολόκληρου του δειγματικού χώρου πρέπει να είναι ίση με 1, θα πρέπει:

$$(1 \cdot 1)c + (1 \cdot 3)c + (2 \cdot 1)c + (2 \cdot 3)c + (4 \cdot 1)c + (4 \cdot 3)c = 1$$

$$\text{Λύνοντας ως προς } c \text{ παίρνουμε: } c = \boxed{\frac{1}{28}}$$

(β) Υπάρχουν 3 δειγματικά σημεία για τα οποία $y < x$. Οπότε η ζητούμενη πιθανότητα θα ισούται με:

$$P(Y < X) = P(\{(2, 1)\}) + P(\{(4, 1)\}) + P(\{(4, 3)\}) = \frac{2 \cdot 1}{28} + \frac{4 \cdot 1}{28} + \frac{4 \cdot 3}{28} = \boxed{\frac{18}{28}}$$

(γ) Υπάρχουν 2 δειγματικά σημεία για τα οποία $y > x$. Οπότε η ζητούμενη πιθανότητα θα ισούται με:

$$P(Y > X) = P(\{(1, 3)\}) + P(\{(2, 3)\}) = \frac{1 \cdot 3}{28} + \frac{2 \cdot 3}{28} = \boxed{\frac{9}{28}}$$

- (δ) Υπάρχει 1 δειγματικό σημείο για το οποίο $y = x$. Οπότε η ζητούμενη πιθανότητα θα ισούται με:

$$P(Y = X) = P(\{(1, 1)\}) = \frac{1 \cdot 1}{28} = \boxed{\frac{1}{28}}$$

Παρατηρήστε ότι, χρησιμοποιώντας τα δύο παραπάνω μέρη της άσκησης, προκύπτει η αναμενόμενη ισότητα:

$$P(Y < X) + P(Y > X) + P(Y = X) = \frac{18}{28} + \frac{9}{28} + \frac{1}{28} = 1$$

- (ε) Υπάρχουν 3 δειγματικά σημεία για τα οποία $y = 3$. Οπότε η ζητούμενη πιθανότητα θα ισούται με:

$$P(Y = 3) = P(\{(1, 3)\}) + P(\{(2, 3)\}) + P(\{(4, 3)\}) = \frac{1 \cdot 3}{28} + \frac{2 \cdot 3}{28} + \frac{4 \cdot 3}{28} = \boxed{\frac{21}{28}}$$

- (στ) Γενικά, για δύο διακριτές τυχαίες μεταβλητές X και Y για τις οποίες έχει οριστεί κοινή συνάρτηση πιθανότητας, έχουμε:

$$p_X(x) = \sum_{y=-\infty}^{\infty} p_{X,Y}(x, y) \quad \text{και} \quad p_Y(y) = \sum_{x=-\infty}^{\infty} p_{X,Y}(x, y)$$

Σε αυτό το πρόβλημα, ο αριθμός των (X, Y) ζευγαριών είναι αρκετά μικρός, οπότε μπορούμε να προσδιορίσουμε τις (οριακές) σ.π. με απαρίθμηση. Για παράδειγμα,

$$p_X(2) = P(\{(2, 1)\}) + P(\{(2, 3)\}) = \frac{8}{28}$$

Συνολικά, θα έχουμε:

$$p_X(x) = \begin{cases} 4/28, & x = 1 \\ 8/28, & x = 2 \\ 16/28, & x = 4 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases} = \begin{cases} 1/7, & x = 1 \\ 2/7, & x = 2 \\ 4/7, & x = 4 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

και

$$p_Y(y) = \begin{cases} 7/28, & y = 1 \\ 21/28, & y = 3 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} = \begin{cases} 1/4, & y = 1 \\ 3/4, & y = 3 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

- (ζ) Γενικά, η αναμενόμενη τιμή οποιασδήποτε διακριτής τυχαίας μεταβλητής X δίνεται από τον ακόλουθο τύπο:

$$E[X] = \sum_{x=-\infty}^{\infty} x p_X(x)$$

Για αυτό το πρόβλημα, θα έχουμε:

$$E[X] = 1 \cdot \frac{1}{7} + 2 \cdot \frac{2}{7} + 4 \cdot \frac{4}{7} = \boxed{3}$$

και

$$E[Y] = 1 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{3}{4} = \boxed{\frac{5}{2}}$$

(η) Έχουμε:

$$\text{Var}(X) = (1-3)^2 \cdot \frac{1}{7} + (2-3)^2 \cdot \frac{2}{7} + (4-3)^2 \cdot \frac{4}{7} = \boxed{\frac{10}{7}}$$

και

$$\text{Var}(Y) = (1-\frac{5}{2})^2 \cdot \frac{1}{4} + (3-\frac{5}{2})^2 \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{16} + \frac{3}{16} = \boxed{\frac{3}{4}}$$

Άσκηση 6.

(α) Για να βρω την σταθερά c κάνω:

$$\sum_{x=1}^3 \sum_{y=1}^3 p_{X,Y}(x,y) = 1 \Rightarrow 45c = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{45}$$

(β) Για την τ.μ X έχω:

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{3+4+5}{45} = \frac{4}{15}, & x=1 \\ \frac{4+5+6}{45} = \frac{1}{3}, & x=2 \\ \frac{5+6+7}{45} = \frac{2}{5}, & x=3 \end{cases}$$

Η τ.μ. Y έχει την ίδια κατανομή με την X , λόγω συμμετρίας της $p_{X,Y}(x,y)$, δηλαδή $p_{X,Y}(a,b) = p_{X,Y}(b,a)$. Οπότε:

$$p_Y(y) = \begin{cases} \frac{3+4+5}{45} = \frac{4}{15}, & y=1 \\ \frac{4+5+6}{45} = \frac{1}{3}, & y=2 \\ \frac{5+6+7}{45} = \frac{2}{5}, & y=3 \end{cases}$$

(γ) Για την πιθανότητα $P(X=Y|X \leq Y)$ έχω:

$$\begin{aligned} P(X=Y|X \leq Y) &= \frac{P(X=Y \cap X \leq Y)}{P(X \leq Y)} \\ &= \frac{p_{X,Y}(1,1) + p_{X,Y}(2,2) + p_{X,Y}(3,3)}{p_{X,Y}(1,1) + p_{X,Y}(1,2) + p_{X,Y}(1,3) + p_{X,Y}(2,2) + p_{X,Y}(2,3) + p_{X,Y}(3,3)} \\ &= \frac{(3+5+7)/45}{(3+4+5+5+6+7)/45} = \frac{15}{30} = 0.5 \end{aligned}$$

(δ) Η πιθανότητα ότι $X=2$, με δεδομένο ότι $X=1$ είναι:

$$P(X=2|Y=1) = \frac{P(X=2, Y=1)}{P(Y=1)} = \frac{p_{X,Y}(2,1)}{p_Y(1)} = \frac{1}{3}$$

(ε) $P(Y \text{ ζυγός} | X \text{ περιττός}) = \frac{p_{X,Y}(1,2) + p_{X,Y}(3,2)}{p_X(1) + p_X(3)} = \frac{(4+6)/45}{(12+18)/45} = \frac{1}{3}$

(στ) $E[Z] = E[2X+Y^2] = 2E[X] + E[Y^2] = 2(1 \cdot \frac{4}{15} + 2 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{2}{5}) + (1^2 \cdot \frac{4}{15} + 2^2 \cdot \frac{1}{3} + 3^2 \cdot \frac{2}{5}) = 9.47$