

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2021-2022
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Τέταρτη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 18/11/2021

Ημερομηνία Παράδοσης: 30/11/2021

ΣΗΜΑΝΤΙΚΕΣ ΟΔΗΓΙΕΣ

- Η παράδοση των ασκήσεών σας θα γίνεται ηλεκτρονικά, **ΑΠΟΚΛΕΙΣΤΙΚΑ** μέσω της σελίδας e-learn του μαθήματος, **εδώ**. Παραδόσεις με e-mail, ή οποιονδήποτε άλλον τρόπο δε θα γίνονται δεκτές και θα **μηδενίζονται**.
- Για την παράδοση, θα πρέπει να σκανάρετε ή να φωτογραφίσετε τις κόλλες των ασκήσεών σας και, στη συνέχεια, να φτιάξετε **ένα PDF** που θα περιλαμβάνει αυτές τις φωτογραφίες, δηλαδή το σύνολο της λυμένης σειράς ασκήσεων.
- Αριθμήστε τις σελίδες των ασκήσεών σας (από την άσκηση 1, στην άσκηση 2, στην άσκηση 3 κ.ο.κ.) και **ΣΙΓΟΥΡΕΥΤΕΙΤΕ** ότι τα σκαναρίσματα που έχετε κάνει έχουν δημιουργήσει εικόνες στις οποίες είναι **ΕΥΔΙΑΚΡΙΤΕΣ** και **ΕΥΚΟΛΟΔΙΑΒΑΣΤΕΣ** οι λύσεις σας. Θολές, και γενικότερα θορυβώδεις, εικόνες ενδέχεται να καταστήσουν αδύνατη τη διαδικασία της διόρθωσης και κατ' επέκταση να οδηγήσουν σε **μηδενισμό** των ασκήσεών σας.

Άσκηση 1.

Το *Παιχνίδι της Σουπιάς* είναι ένα ειρηνικό και ανώδυνο παιχνίδι που διεξάγεται μία φορά το χρόνο στην πόλη Gwangmyeong της Νότιας Κορέας. Σύμφωνα με το παιχνίδι, ένας διαγωνιζόμενος, "Η Σουπιά", έρχεται αντιμέτωπος με 456 αντιπάλους-θυρευτές, τον ένα μετά τον άλλο και με ανεξάρτητες προσπάθειες από αντίπαλο σε αντίπαλο. Σκοπός σε κάθε αναμέτρηση είναι, με την αποκλειστική χρήση τεχνικών καμουφλάζ, η "Σουπιά" να αποφύγει τον εντοπισμό της από τον εκάστοτε αντίπαλο. Ο Jeong Chin-Hae (JCH), όντας ικανός και ταλαντούχος στη χρήση καμουφλάζ, αποφασίζει πως φέτος είναι ο καιρός να δοκιμάσει την τύχη του. Για την ακρίβεια, Ο Jeong Chin-Hae έχει 1% πιθανότητα να εντοπιστεί σε κάθε αναμέτρηση, ανεξάρτητα από τις θυρευτικές ικανότητες του κάθε αντιπάλου του.

(α) Ο Jeong Chin-Hae ξεκινάει το παιχνίδι ενάντια στους 10 πρώτους αντιπάλους. Αφού παίξει και με τους 10, αν τουλάχιστον 2 έχουν καταφέρει να τον εντοπίσουν, τότε αποκλείεται οριστικά και αμετάκλητα από το Παιχνίδι της Σουπιάς, χωρίς να συνεχίσει παρακάτω. Ποια η πιθανότητα να συμβεί αυτό; Ποιος είναι ο αναμενόμενος αριθμός αντιπάλων που θα τον εντοπίσουν σε αυτούς τους 10 πρώτους γύρους (ο αριθμός αυτός δε χρειάζεται να είναι ακέραιος) και ποια η διασπορά;

(β) Όταν ο Jeong Chin-Hae φτάσει ακριβώς στα μισά του διαγωνισμού (έχει αντιμετωπίσει, δηλαδή, ακριβώς τους μισούς αντιπάλους), γίνεται καταμέτρηση των φορών που απέτυχε. Αν το πολύ 2 αντίπαλοι τον έχουν εντοπίσει, κερδίζει τον τιμητικό τίτλο του "Kraken" και συνεχίζει κανονικά με τους υπόλοιπους αντιπάλους. Σε αντίθετη περίπτωση σταματά εκεί το παιχνίδι. Ποια η πιθανότητα ο Jeong Chin-Hae να αποκτήσει τον τίτλο του "Kraken"; Ποια η πιθανότητα ο πρώτος αντίπαλος που θα τον εντοπίσει να είναι ο αντίπαλος 100; Ποια η πιθανότητα ο δεύτερος αντίπαλος που θα τον εντοπίσει να είναι ο αντίπαλος 200; Για τη λύση αυτού του υποερωτήματος, μπορείτε να αγνοήσετε την όποια δεδομένη γνώση προκύπτει από τα δεδομένα που δίνονται στο υποερώτημα (α).

(γ) Θεωρώντας δεδομένο ότι έχει καταφέρει προηγουμένως να αποκτήσει τον τίτλο του "Kraken", για να κερδίσει ο Jeong Chin-Hae το έπαθλο των 45.6 δισεκατομμυρίων Won, καθώς και τον ανώτατο τίτλο του "Cthulhu", θα πρέπει να αντιμετωπίσει τους 228 υπολειπόμενους αντιπάλους, χωρίς να τον εντοπίσουν καμία φορά. Ποια η πιθανότητα να αποκλειστεί από τον τελευταίο αντίπαλο;

Άσκηση 2.

(α) Αν $E[X] = 1$ και $\text{Var}(X) = 5$, βρείτε τα $E[(2 + X)^2]$ και $\text{Var}(4 + 3X)$.

(β) Η από κοινού σ.π. των τ.μ. X, Y και Z είναι:

$$p(1, 2, 3) = p(2, 1, 1) = p(2, 2, 1) = p(2, 3, 2) = \frac{1}{4}.$$

Βρείτε τις μέσες τιμές $E[XYZ]$ και $E[XY + XZ + YZ]$.

Άσκηση 3.

Δύο παίκτες ρίχνουν ένα δίκαιο τετράεδρο ζάρι δύο φορές ο καθένας. Ο παίκτης Α κερδίζει το μέγιστο των δύο ρίψεων μείον 1, το οποίο συμβολίζουμε με X . Ο παίκτης Β κερδίζει το ελάχιστο των δύο ρίψεων, το οποίο συμβολίζουμε με Y .

(α) Υπολογίστε την από κοινού συνάρτηση πιθανότητας των τ.μ. X και Y , $p_{X,Y}(x, y)$, καθώς και τις περιθωριακές σ.π. $p_X(x)$ και $p_Y(y)$.

(β) Υπολογίστε τις μέσες τιμές των τ.μ. X, Y και $X - Y$.

(γ) Υπολογίστε τις διασπορές των τ.μ. X και Y .

(δ) Υπολογίστε τη σ.π. και τη διασπορά της τ.μ. $Z = X - Y$.

Άσκηση 4.

Ο Candyman, σύμφωνα με τον αστικό μύθο, είναι ένα καλοκάγαθο πνεύμα που, υπό συγκεκριμένες προϋποθέσεις, μπορεί να σου φανερωθεί και να σε "πλημμυρίσει" με γλυκά και σοκολάτες. Το 1% του πληθυσμού πιστεύει στην ύπαρξη του Candyman. Οι υπόλοιποι θεωρούν ότι η ιστορία του Candyman δεν είναι τίποτα άλλο παρά ένα παραμύθι για παιδιά. Επιλέγουμε ένα τυχαίο δείγμα του συνολικού πληθυσμού που αποτελείται από 5000 άτομα και θέλουμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα **το πολύ 2** από αυτούς να πιστεύουν στην ύπαρξη του Candyman. Ενδείκνυται η χρήση της προσέγγισης Poisson για τον υπολογισμό αυτόν; Λύστε, χρησιμοποιώντας την κατανομή που θεωρείτε περισσότερο κατάλληλη. Απαντήστε μονολεκτικά αν εσείς πιστεύετε ότι ο Candyman υπάρχει. Διαβάστε την εκφώνηση της άσκησης **από μέσα σας και όχι** μπροστά σε καθρέφτη.

Άσκηση 5.

Οι τ.μ. X και Y έχουν την από κοινού σ.π.

$$p_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} cxy & \text{αν } x \in \{1, 2, 4\} \text{ και } y \in \{1, 3\} \\ 0 & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

(α) Ποια είναι η τιμή της σταθεράς c ;

(β) Ποια είναι η $P(Y < X)$;

(γ) Ποια είναι η $P(Y > X)$;

(δ) Ποια είναι η $P(Y = X)$;

(ε) Ποια είναι η $P(Y = 3)$;

(στ) Βρείτε τις περιθωριακές σ.π. των X και Y .

(ζ) Βρείτε τις μέσες τιμές των X και Y .

(η) Βρείτε τις διασπορές των X και Y .

Άσκηση 6.

Οι τ.μ. X και Y παίρνουν τιμές x και y , αντίστοιχα, στο σύνολο $\{1, 2, 3\}$. Στον παρακάτω πίνακα μας δίδεται η από κοινού συνάρτηση πιθανότητας (σ.π.) $p_{X,Y}(x, y)$ των τ.μ. X και Y .

		Y			$p_X(x)$
		$y = 1$	$y = 2$	$y = 3$	
X	$x = 1$	$3c$	$4c$	$5c$	
	$x = 2$	$4c$	$5c$	$6c$	
	$x = 3$	$5c$	$6c$	$7c$	
$p_Y(y)$					

- (α) Υπολογίστε τη σταθερά c .
- (β) Υπολογίστε τις περιθωριακές σ.π. $p_X(x)$ και $p_Y(y)$ των τ.μ. X και Y , αντίστοιχα.
- (γ) Υπολογίστε τη δεσμευμένη πιθανότητα $P(X = Y \mid X \leq Y)$.
- (δ) Δεδομένου ότι $Y = 1$, ποια είναι η δεσμευμένη πιθανότητα ότι $X = 2$;
- (ε) Υπολογίστε τη δεσμευμένη πιθανότητα $P(Y \text{ είναι ζυγός} \mid X \text{ είναι περιττός})$;
- (στ) Έστω $Z = 2X + Y^2$. Βρείτε τη μέση τιμή, $E[Z]$, της τ.μ. Z .

Άσκηση 7. - Προγραμματιστική

- (α) Για $\lambda = 1$ και για τέσσερις ακόμη τιμές της επιλογής σας, σχεδιάστε μία Poisson κατανομή και σχολιάστε σχετικά με την "επιρόη" της τιμής του λ στη συγκεκριμένη κατανομή.
- (β) Για $n = 10$ και $p = 0.3$ σχεδιάστε στο ίδιο διάγραμμα τις αντίστοιχες Poisson και Διωνυμική. Επαναλάβετε για $n = 100$ και $p = 0.2$, για $n = 1000$ και $p = 0.1$ και για $n = 10000$ και $p = 0.01$. Για όλες τις διαφορετικές περιπτώσεις, σχολιάστε τα αποτελέσματα που προέκυψαν.

Μαζί με τον κώδικά σας, παραδώστε τις εικόνες/διαγράμματα που παράξατε, καθώς και τα σχόλια στα ερωτήματα που έχουν τεθεί.

Χρήσιμες συναρτήσεις: (MATLAB: binopdf, poisspdf - Python: scipy.stats.binom, scipy.stats.poisson)