

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2021-2022
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Ενδεικτικές Λύσεις Τρίτης Σειράς Ασκήσεων

Άσκηση 1

Πόσα δυνατά Passwords 10 χαρακτήρων δημιουργούνται εάν:

- α) Χρησιμοποιήσουμε μόνο πεζά γράμματα του λατινικού αλφαβήτου.
- β) Χρησιμοποιήσουμε μόνο πεζά γράμματα του λατινικού αλφαβήτου, όλα διαφορετικά μεταξύ τους.
- γ) Χρησιμοποιήσουμε μόνο πεζά γράμματα του λατινικού αλφαβήτου, όλα διαφορετικά μεταξύ τους και σε αλφαβητική σειρά.
- δ) Χρησιμοποιήσουμε μόνο πεζά γράμματα του λατινικού αλφαβήτου και ψηφία εναλλάξ, όλα διαφορετικά μεταξύ τους.
- ε) Χρησιμοποιήσουμε μόνο τα γράμματα A και Z.
- στ) Χρησιμοποιήσουμε μόνο τα γράμματα A και Z και τα περιλαμβάνει **και** τα δύο.
- ζ) Χρησιμοποιήσουμε μόνο τα γράμματα A και Z σε ίδιο πλήθος το καθένα.

Λύση:

- α) Το λατινικό αλφάβητο έχει 26 γράμματα από τα οποία διαλέγουμε 10, ενδιαφερόμενοι για τη διάταξη και έχοντας τη δυνατότητα να διαλέξουμε ένα γράμμα πάνω από μία φορά.
Άρα, χρησιμοποιώντας μόνο πεζά γράμματα του λατινικού αλφαβήτου μπορούμε να δημιουργήσουμε 26^{10} διαφορετικά Passwords 10 χαρακτήρων.
- β) Το λατινικό αλφάβητο έχει 26 γράμματα από τα οποία διαλέγουμε 10 διαφορετικά μεταξύ τους, ενδιαφερόμενοι για τη διάταξη.
Άρα, χρησιμοποιώντας μόνο πεζά γράμματα του λατινικού αλφαβήτου, όλα διαφορετικά μεταξύ τους, μπορούμε να δημιουργήσουμε $P(26, 10) = \frac{26!}{(26-10)!} = \frac{26!}{16!}$ διαφορετικά Passwords 10 χαρακτήρων.
- γ) Το λατινικό αλφάβητο έχει 26 γράμματα. Όλοι οι δυνατοί συνδυασμοί με τους οποίους μπορούμε να διαλέξουμε 10, διαφορετικά μεταξύ τους, από αυτά, είναι:

$$C(26, 10) = \binom{26}{10} = \frac{26!}{10! \cdot (26-10)!} = \frac{26!}{10! \cdot 16!}$$

Παρατηρούμε ότι καθένας από αυτούς τους συνδυασμούς μπορεί να διαταχθεί μοναδικά με τέτοιο τρόπο ώστε να είναι σε αλφαβητική σειρά.

Επομένως, εάν χρησιμοποιήσουμε μόνο πεζά γράμματα του λατινικού αλφαβήτου, όλα διαφορετικά μεταξύ τους και σε αλφαβητική σειρά, μπορούμε να δημιουργήσουμε $\frac{26!}{10! \cdot 16!}$ διαφορετικά Passwords 10 χαρακτήρων.

- δ) Το λατινικό αλφάβητο έχει 26 γράμματα και τα ψηφία είναι 10.
Οι δυνατοί τρόποι να επιλέξουμε 5, διαφορετικά μεταξύ τους, γράμματα από τα 26, ενδιαφερόμενοι για τη διάταξη, είναι:

$$P(26, 5) = \frac{26!}{(26-5)!} = \frac{26!}{21!}$$

Ομοίως, οι δυνατοί τρόποι να επιλέξουμε 5, διαφορετικά μεταξύ τους, ψηφία από τα 10, ενδιαφερόμενοι για τη διάταξη, είναι:

$$P(10, 5) = \frac{10!}{(10-5)!} = \frac{10!}{5!}$$

Όμως, αφού πρέπει να χρησιμοποιήσουμε γράμματα και ψηφία εναλλάξ διακρίνουμε 2 περιπτώσεις: είτε το Password αρχίζει με γράμμα, είτε το Password αρχίζει με ψηφίο.

Συμπερασματικά, λοιπόν, εφαρμόζοντας τον κανόνα του γινομένου προκύπτει ότι χρησιμοποιώντας μόνο πεζά γράμματα του λατινικού αλφαβήτου και ψηφία εναλλάξ, όλα διαφορετικά μεταξύ τους, μπορούμε να δημιουργήσουμε:

$$\frac{26!}{21!} \cdot \frac{10!}{5!} \cdot 2 = 477.404.928.000 \text{ διαφορετικά Passwords } 10 \text{ χαρακτήρων.}$$

- ε) Χρησιμοποιώντας μόνο τα γράμματα Α και Ζ, ενδιαφερόμενοι για τη διάταξη και, προφανώς, χρησιμοποιώντας ένα γράμμα πάνω από μία φορά, μπορούμε να δημιουργήσουμε $2^{10} = 1024$ διαφορετικά Passwords 10 χαρακτήρων.
- στ) Όπως βρήκαμε στο υποερώτημα (ε), χρησιμοποιώντας μόνο τα γράμματα Α και Ζ, μπορούμε να δημιουργήσουμε $2^{10} = 1024$ διαφορετικά Passwords 10 χαρακτήρων. Αφού, όμως, σε αυτήν την περίπτωση, πρέπει να τα περιλαμβάνει **και** τα δύο, τα Passwords "AAAAAAAAAA" και "ZZZZZZZZZZ" δεν είναι αποδεκτά. Άρα, χρησιμοποιώντας μόνο τα γράμματα Α και Ζ και περιλαμβάνοντάς τα **και** τα δύο, μπορούμε να δημιουργήσουμε $2^{10} - 2 = 1022$ διαφορετικά Passwords 10 χαρακτήρων.
- ζ) Αφού έχουμε 2 γράμματα στη διάθεση μας, το Password είναι 10 χαρακτήρων και πρέπει να χρησιμοποιήσουμε ίδιο πλήθος φορές το κάθε γράμμα, κάθε γράμμα θα χρησιμοποιηθεί 5 φορές. Συνεπώς, κάθε Password θα περιέχει πέντε "Α" και πέντε "Ζ". Επιλέγουμε ένα από τα δύο γράμματα και το τοποθετούμε σε πέντε από τις δέκα διαθέσιμες θέσεις. Επομένως, στις υπόλοιπες πέντε θέσεις που απομένουν τοποθετούμε το άλλο γράμμα. Οι δυνατοί τρόποι να διαλέξουμε 5 από τις 10 θέσεις είναι:

$$C(10, 5) = \binom{10}{5} = \frac{10!}{5! \cdot (10-5)!} = \frac{10!}{5! \cdot 5!} = 252$$

Άρα, χρησιμοποιώντας μόνο τα γράμματα Α και Ζ σε ίδιο πλήθος το καθένα μπορούμε να δημιουργήσουμε 252 διαφορετικά Passwords 10 χαρακτήρων.

Άσκηση 2

- Ένας επταψήφιος αριθμός τηλεφώνου $a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7$ θεωρείται εύκολος να τον θυμάται κανείς, εάν τα τρία πρώτα ψηφία του, $a_1a_2a_3$, είναι ίδια με τα επόμενα τρία ψηφία, $a_4a_5a_6$, ή με τα τελευταία τρία ψηφία, $a_5a_6a_7$. Πόσοι τέτοιοι "εύκολοι" επταψήφιοι αριθμοί τηλεφώνου υπάρχουν;
- Δέκα φίλοι αποφάσισαν να παίξουν έναν αγώνα μπάσκετ. Με πόσους τρόπους μπορούν να χωριστούν σε δύο ομάδες των 5 ατόμων;
- Σε ένα τραπέζι γάμου πρέπει να καθίσουν 50 προσκεκλημένοι σε 5 κυκλικά τραπέζια των 10 ατόμων. Με πόσους τρόπους μπορούν να καθίσουν;

Λύση:

- Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

- 1η Περίπτωση:** Αν $a_1a_2a_3 = a_4a_5a_6$, τότε υπάρχουν $10^3 \cdot 10$ "εύκολοι" επταψήφιοι αριθμοί τηλεφώνου διότι έχω 10 επιλογές για κάθε ένα από τα 3 πρώτα ψηφία, αλλά η επιλογή αυτών καθορίζει και τα επόμενα 3 ψηφία, και 10 δυνατές επιλογές για το τελευταίο.
- 2η Περίπτωση:** Ομοίως, αν $a_1a_2a_3 = a_5a_6a_7$, υπάρχουν $10^3 \cdot 10$ "εύκολοι" επταψήφιοι αριθμοί τηλεφώνου διότι έχω 10 επιλογές για κάθε ένα από τα 3 πρώτα ψηφία, αλλά η επιλογή αυτών καθορίζει και τα τελευταία 3 ψηφία, και 10 δυνατές επιλογές για το μεσαίο, τέταρτο, ψηφίο.
- 3η Περίπτωση:** Αν $a_1a_2a_3 = a_4a_5a_6 = a_5a_6a_7$, δηλαδή αν ο αριθμός έχει και τα 7 ψηφία του ίδια μεταξύ τους, τότε, προφανώς, υπάρχουν 10 "εύκολοι" επταψήφιοι αριθμοί τηλεφώνου.

Παρατήρηση: η 3η Περίπτωση εμπεριέχεται στις δύο πρώτες.

Συμπερασματικά, λοιπόν, εφαρμόζοντας την αρχή του εγκλεισμού-αποκλεισμού οι "εύκολοι" επταψήφιοι αριθμοί τηλεφώνου που προκύπτουν είναι:

$$10^3 \cdot 10 + 10^3 \cdot 10 - 10 = 19990$$

2. Υποθέτουμε ότι όλα τα μέλη μιας ομάδας είναι ισοδύναμα, καθώς στην εκφώνηση δεν διευκρινίζεται κάτι διαφορετικό. Οπότε, μας ενδιαφέρουν οι συνδυασμοί και όχι η διάταξη. Καλούμαστε, λοιπόν, να επιλέξουμε 5 από τα δέκα άτομα και τα υπόλοιπα πέντε από τα πέντε που απομένουν, δηλαδή:

$$C(10, 5) \cdot C(5, 5) = \frac{10!}{5! \cdot 5!} \cdot 1 = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{120} = 252$$

Όμως, στην πραγματικότητα, έχουμε τις μισές από αυτές τις επιλογές διότι οι 252 τρόποι που βρήκαμε συμπεριλαμβάνουν δύο φορές την κάθε λύση.

Για παράδειγμα, έστω ότι μία από τις επιλεγμένες πεντάδες είναι η $A = p_1, p_2, p_3, p_4, p_5$. Τότε, η άλλη ομάδα, προφανώς, και θα είναι η $B = p_6, p_7, p_8, p_9, p_{10}$. Στους 252 τρόπους, όμως, συμπεριλαμβάνεται και η επιλογή των $A = p_1, p_2, p_3, p_4, p_5$ και των υπολοίπων $B = p_6, p_7, p_8, p_9, p_{10}$ οι οποίες δεν αποτελούν διαφορετικές επιλογές, η σύνθεση των δύο ομάδων θα είναι, τελικά, η ίδια. Άρα, υπάρχουν $252/2 = 126$ διαφορετικοί τρόποι να χωριστούν οι δέκα φίλοι σε δύο ομάδες των 5 ατόμων.

3. Αρχικά, χρειάζεται να κατανείμουμε τους προσκεκλημένους στα 5 τραπέζια. Για να γίνει αυτό, τους χωρίζουμε σε πέντε ομάδες των δέκα ατόμων. Υπάρχουν $\frac{50!}{10! \cdot 10! \cdot 10! \cdot 10! \cdot 10!}$ διαφορετικοί τρόποι να πραγματοποιηθεί το παραπάνω.

Σε κάθε τραπέζι, οι καλεσμένοι μπορούν να καθίσουν με 9! τρόπους.

Προσοχή: Οι πιθανές μεταθέσεις των 10 ατόμων είναι 10!, όμως τα τραπέζια είναι κυκλικά. Επομένως, η διάταξη $abcdefghik$ είναι ίδια με την $kabcdefghi$, με την $ikabcdefgh$ κ.λ.π, που είναι συνολικά 10 στον αριθμό. Άρα, $\frac{10!}{10} = 9!$ διαφορετικοί τρόποι να καθίσουν οι καλεσμένοι σε ένα τραπέζι.

Τα διαφορετικά τραπέζια είναι πέντε. Οπότε, οι διαφορετικοί τρόποι να καθίσουν οι καλεσμένοι σε αυτά είναι $\left(\frac{10!}{10}\right)^5$.

Συμπερασματικά, λοιπόν, σύμφωνα με τον κανόνα του γινομένου οι 50 προσκεκλημένοι μπορούν να καθίσουν σε 5 κυκλικά τραπέζια των 10 ατόμων με:

$$\frac{50!}{10! \cdot 10! \cdot 10! \cdot 10! \cdot 10!} \cdot \left(\frac{10!}{10}\right)^5 = \frac{50!}{10^5} \text{ τρόπους}$$

Άσκηση 3

- Ένα δίκαιο εξάπλευρο ζάρι ρίχνεται τρεις φορές ανεξάρτητα. Ποιο είναι πιο πιθανό: να προκύψει άθροισμα ίσο με 11 ή με 12;
- Η ομάδα σας παίζει στην έδρα της 11 διαδοχικά παιχνίδια με αντίπαλες ομάδες. Λόγω "νέας εποχής εξυγίανσης" στο ελληνικό ποδόσφαιρο, έχει προαποφασιστεί να κάνει 5 νίκες, 4 ισοπαλίες και 2 ήττες. Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει αυτό;

Λύση:

- Ένα άθροισμα ίσο με 11 λαμβάνεται με τους ακόλουθους 6 συνδυασμούς:

$$(6, 4, 1)(6, 3, 2)(5, 5, 1)(5, 4, 2)(5, 3, 3)(4, 4, 3).$$

Ένα άθροισμα ίσο με 12 λαμβάνεται με τους ακόλουθους 6 συνδυασμούς:

$$(6, 5, 1)(6, 4, 2)(6, 3, 3)(5, 5, 2)(5, 4, 3)(4, 4, 4).$$

Κάθε συνδυασμός από 3 διακριτούς αριθμούς αντιστοιχεί σε $3! = 6$ μεταθέσεις, κάθε συνδυασμός από 3 αριθμούς, δύο εκ των οποίων είναι ίσοι, αντιστοιχεί σε $\frac{3!}{2!} = \frac{6}{2} = 3$ μεταθέσεις και κάθε συνδυασμός από 3 ίσους αριθμούς αντιστοιχεί, προφανώς, σε μία μετάθεση.

- Καταμετρώντας τον αριθμό των μεταθέσεων στους 6 συνδυασμούς που αντιστοιχούν σε άθροισμα ίσο με 11, λαμβάνουμε: $6 + 6 + 3 + 6 + 3 + 3 = 27$ μεταθέσεις.

- Καταμετρώντας τον αριθμό των μεταθέσεων στους 6 συνδυασμούς που αντιστοιχούν σε άθροισμα ίσο με 12, λαμβάνουμε: $6 + 6 + 3 + 3 + 6 + 1 = 25$ μεταθέσεις.

Δεδομένου, λοιπόν, ότι όλες οι μεταθέσεις είναι ισοπίθανες, αφού το ζάρι μας είναι δίκαιο και οι ρίψεις ανεξάρτητες μεταξύ τους, ένα άθροισμα ίσο με 11 είναι πιο πιθανό από ένα άθροισμα ίσο με 12 ($27 > 25$).

Παρατήρηση: Ο δειγματοχώρος περιλαμβάνει $6^3 = 216$ στοιχεία. Συνεπώς, προκύπτει ότι:

$$P(11) = \frac{27}{216} > P(12) = \frac{25}{216}$$

- Εδώ, απλώς, θέλουμε να μοιράσουμε 11 "αντικείμενα", τα 11 παιχνίδια, σε τρεις κατηγορίες των πέντε, των τεσσάρων και των δύο. Συνεπώς, οι τρόποι για να πραγματοποιηθεί αυτό είναι:

$$\binom{11}{5, 4, 2} = \frac{11!}{5!4!2!} = 6930$$

Εναλλακτικά, αν δεν θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε τον έτοιμο τύπο, μπορούμε να σκεφτούμε ως εξής: η πρώτη νίκη μπορεί να εμφανιστεί σε οποιονδήποτε από τους 11 αγώνες, η δεύτερη νίκη μπορεί να εμφανιστεί σε οποιονδήποτε από τους 10 εναπομείναντες αγώνες κ.ο.κ. και για τα 11 αποτελέσματα. Οπότε, προκύπτουν 11! δυνατά αποτελέσματα.

Παρατηρούμε ότι οι νίκες μπορούν να εμφανιστούν με 5! διαφορετικούς τρόπους, οι ισοπαλίες με 4! διαφορετικούς τρόπους και οι ήττες με 2! διαφορετικούς τρόπους. Για κάθε μία συγκεκριμένη ακολουθία αποτελεσμάτων όπου οι νίκες/ισοπαλίες/ήττες δεν είναι διακριτές, υπάρχουν $5! \times 4! \times 2!$ ακολουθίες. Άρα, αν X είναι ο ζητούμενος αριθμός, θα πρέπει:

$$X \times 5! \times 4! \times 2! = 11! \Rightarrow X = \frac{11!}{5!4!2!} = 6930$$

Άσκηση 4

Σε ένα πανεπιστήμιο προσφέρονται 8 μαθήματα χαμηλού επιπέδου: $\{L_1, L_2, \dots, L_8\}$ και 10 μαθήματα υψηλού επιπέδου: $\{H_1, H_2, \dots, H_{10}\}$. Ένα έγκυρο πρόγραμμα σπουδών αποτελείται από 4 μαθήματα χαμηλού επιπέδου και 3 μαθήματα υψηλού επιπέδου.

α) Πόσα είναι τα πιθανά διαφορετικά έγκυρα προγράμματα σπουδών;

β) Υποθέστε ότι τα $\{H_1, H_2, \dots, H_5\}$ έχουν ως προαπαιτούμενο το L_1 , και τα $\{H_6, H_7, \dots, H_{10}\}$ έχουν ως προαπαιτούμενα τα L_2 και L_3 . Για παράδειγμα, οποιοδήποτε πρόγραμμα σπουδών που περιέχει κάποιο από τα $\{H_1, H_2, \dots, H_5\}$ για να είναι έγκυρο πρέπει να περιέχει και το L_1 .

Πόσα διαφορετικά έγκυρα προγράμματα σπουδών υπάρχουν;

Λύση:

α) Υπάρχουν $\binom{8}{4}$ τρόποι για να πάρει κάποιος 4 μαθήματα χαμηλού επιπέδου και $\binom{10}{3}$ τρόποι για να επιλέξει 3 μαθήματα υψηλού επιπέδου. Επομένως, υπάρχουν $\binom{8}{4} \cdot \binom{10}{3}$ διαφορετικά έγκυρα προγράμματα σπουδών.

β) Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

- Έστω ότι δεν επιλέγουμε το L_1 . Τότε, πρέπει να επιλεγθούν τα L_2 και L_3 , αλλιώς δεν επιτρέπεται να πάρουμε κάποιο μάθημα υψηλού επιπέδου. Επομένως, χρειάζεται να επιλέξουμε 2, επιπλέον, μαθήματα χαμηλού επιπέδου, από τα 5 υπολειπόμενα, και 3 μαθήματα υψηλού επιπέδου από τα 5 διαθέσιμα. Άρα, μπορούμε να έχουμε $\binom{5}{2} \cdot \binom{5}{3}$ διαφορετικά έγκυρα προγράμματα σπουδών.
- Έστω ότι επιλέγουμε το L_1 , αλλά δεν επιλέγουμε ούτε το L_2 , ούτε το L_3 . Άρα, μπορούμε να έχουμε $\binom{5}{3} \cdot \binom{5}{3}$ διαφορετικά έγκυρα προγράμματα σπουδών.
- Έστω ότι επιλέγουμε το L_1 και ένα εκ των L_2 και L_3 . Τότε, υπάρχουν 2 τρόποι να επιλέξουμε μεταξύ του L_2 και L_3 , $\binom{5}{2}$ τρόποι να διαλέξουμε 2 μαθήματα χαμηλού επιπέδου από τα $\{L_4, L_5, L_6, L_7, L_8\}$ και $\binom{5}{3}$ τρόποι να διαλέξουμε 3 μαθήματα υψηλού επιπέδου από τα $\{H_1, \dots, H_5\}$. Άρα, μπορούμε να έχουμε $2 \cdot \binom{5}{2} \cdot \binom{5}{3}$ διαφορετικά έγκυρα προγράμματα σπουδών.
- Έστω ότι επιλέγουμε τα L_1, L_2 και L_3 . Σε αυτήν την περίπτωση, μπορούμε να έχουμε $\binom{5}{1} \cdot \binom{10}{3}$ διαφορετικά έγκυρα προγράμματα σπουδών.

Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι δεν έχουμε "διπλές μετρήσεις", επειδή δεν υπάρχει επικάλυψη στις παραπάνω περιπτώσεις, είναι μεταξύ τους ξένες. Επιπλέον, παρατηρούμε ότι έχουμε θεωρήσει κάθε δυνατή επιλογή. Συμπερασματικά, το τελικό αποτέλεσμα προκύπτει, απλώς, προσθέτοντας τα διαφορετικά έγκυρα προγράμματα σπουδών των τεσσάρων περιπτώσεων παραπάνω.

Άσκηση 5

Σε ένα τουρνουά σκακιού κάθε παίκτης έπαιξε ακριβώς ένα παιχνίδι με κάθε άλλο παίκτη. Στο τέλος, καταμετρήθηκαν 45 παιχνίδια μεταξύ γυναικών και 190 παιχνίδια μεταξύ ανδρών. Σε πόσα παιχνίδια ο ένας παίκτης ήταν άνδρας και ο άλλος γυναίκα;

Λύση:

Γνωρίζουμε ότι το σκάκι είναι παιχνίδι 2 παικτών.

Αφού τα παιχνίδια μεταξύ γυναικών είναι 45, ξέρουμε ότι $C(\gamma, 2) = 45$, όπου " γ " το πλήθος των γυναικών.

$$\begin{aligned} C(\gamma, 2) = 45 &\Leftrightarrow \binom{\gamma}{2} = 45 \Leftrightarrow \frac{\gamma!}{2! \cdot (\gamma - 2)!} = 45 \Leftrightarrow \\ \frac{\gamma!}{(\gamma - 2)!} &= 45 \cdot 2! \Leftrightarrow \frac{(\gamma - 2)! \cdot (\gamma - 1) \cdot \gamma}{(\gamma - 2)!} = 90 \Leftrightarrow \\ (\gamma - 1) \cdot \gamma &= 90 \Leftrightarrow \gamma^2 - \gamma - 90 = 0 \\ \Delta &= \beta^2 - 4\alpha\gamma = 1 + 360 = 361 \\ \gamma_1, \gamma_2 &= \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(1) \pm \sqrt{361}}{2} = \frac{1 \pm 19}{2} = \begin{cases} \frac{20}{2} = 10 \\ -\frac{18}{2} = -9 \end{cases} \text{ Απορρίπτεται.} \end{aligned}$$

Επομένως, στο τουρνουά συμμετείχαν 10 γυναίκες.

Ομοίως, αφού τα παιχνίδια μεταξύ ανδρών είναι 190, ξέρουμε ότι $C(\alpha, 2) = 190$, όπου " α " το πλήθος των ανδρών.

$$\begin{aligned} C(\alpha, 2) = 190 &\Leftrightarrow \binom{\alpha}{2} = 190 \Leftrightarrow \frac{\alpha!}{2! \cdot (\alpha - 2)!} = 190 \Leftrightarrow \\ \frac{\alpha!}{(\alpha - 2)!} &= 190 \cdot 2! \Leftrightarrow \frac{(\alpha - 2)! \cdot (\alpha - 1) \cdot \alpha}{(\alpha - 2)!} = 380 \Leftrightarrow \\ (\alpha - 1) \cdot \alpha &= 380 \Leftrightarrow \alpha^2 - \alpha - 380 = 0 \\ \Delta &= \beta^2 - 4\alpha\gamma = 1 + 1520 = 1521 \\ \alpha_1, \alpha_2 &= \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(1) \pm \sqrt{1521}}{2} = \frac{1 \pm 39}{2} = \begin{cases} \frac{40}{2} = 20 \\ -\frac{38}{2} = -19 \end{cases} \text{ Απορρίπτεται.} \end{aligned}$$

Επομένως, στο τουρνουά συμμετείχαν 20 άνδρες.

Σύμφωνα με την εκφώνηση, κάθε παίκτης έπαιξε ακριβώς ένα παιχνίδι με κάθε άλλο παίκτη.

Συνεπώς, ο ένας παίκτης ήταν άνδρας και ο άλλος γυναίκα σε $10 \cdot 20 = \mathbf{200}$ παιχνίδια.

Άσκηση 6

Ρίχνουμε δύο δίκαια τριέδρα ζάρια. Ορίζουμε την τυχαία μεταβλητή X ως την διαφορά μεταξύ των αποτελεσμάτων των δύο ρίψεων.

- Να υπολογιστεί η Συνάρτηση Πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής X , $p_X(x)$, και να γίνει η γραφική της παράσταση.
- Να υπολογιστεί η Συνάρτηση Πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής $Y = X^2$, $p_Y(y)$, και να γίνει η γραφική της παράσταση.

Λύση:

- Ο δειγματοχώρος του πειράματος αποτελείται από 9 ισοπίθανα ζευγάρια (i, j) με $i, j = 1, 2, 3$. Για κάθε τιμή της τ.μ. X , $0, \pm 1, \pm 2$ υπολογίζουμε το πλήθος των αποτελεσμάτων που δίνουν διαφορά που ισούται με την αντίστοιχη τιμή της τ.μ. X . Για παράδειγμα, το γεγονός $\{X = 0\}$ προκύπτει όταν έρθουν οι 3 διπλές, $(1, 1)$, $(2, 2)$, και $(3, 3)$.

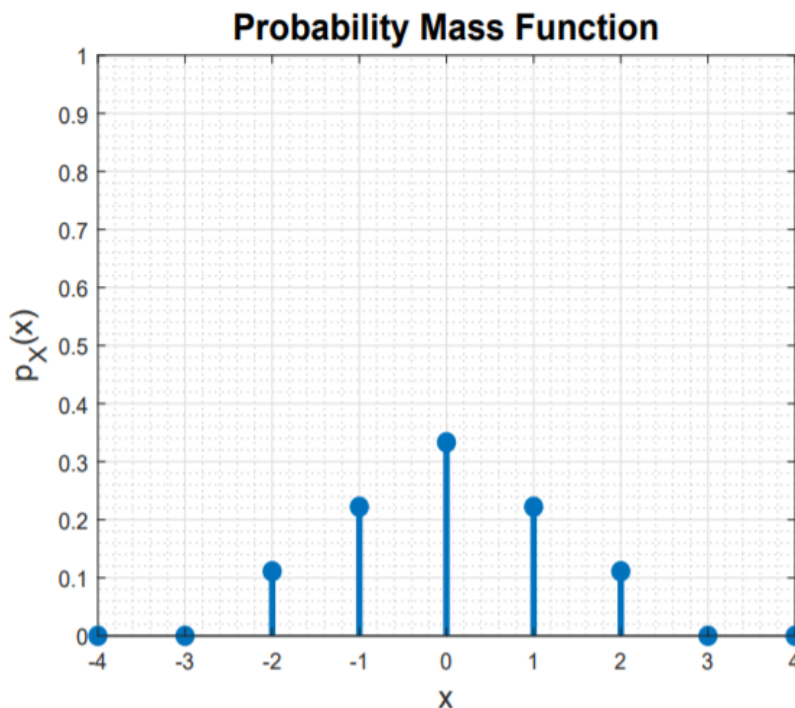
Καταμετρούμε τον αριθμό των ευνοϊκών περιπτώσεων για κάθε ενδεχόμενο, τιμή της τ.μ. X , προς εκείνων των συνολικών πιθανών περιπτώσεων. Εύκολα, προκύπτει, τότε, ότι η ζητούμενη Συνάρτηση Πιθανότητας (Μάζας) θα έχει την ακόλουθη μορφή:

$$p_X(x) = \begin{cases} 1/9, & x = -2, 2 \\ 2/9, & x = -1, 1 \\ 3/9, & x = 0 \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases}$$

Παρατήρηση: Η $p_X(x)$ είναι μία έγκυρη Συνάρτηση Πιθανότητας (Μάζας), καθώς ικανοποιεί τη Συνθήκη Κανονικοποίησης:

$$\sum_{x=-2}^2 p_X(x) = \frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{3}{9} + \frac{2}{9} + \frac{1}{9} = 1$$

Η γραφική της παράσταση (περιορισμένη στο διάστημα $[-4, 4]$) φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Σχήμα 1: Συνάρτηση Πιθανότητας (Μάζας) $p_X(x)$

β) Εύκολα, προκύπτει ότι η τ.μ. $Y = X^2$ παίρνει τις τιμές 0, 1, 4.

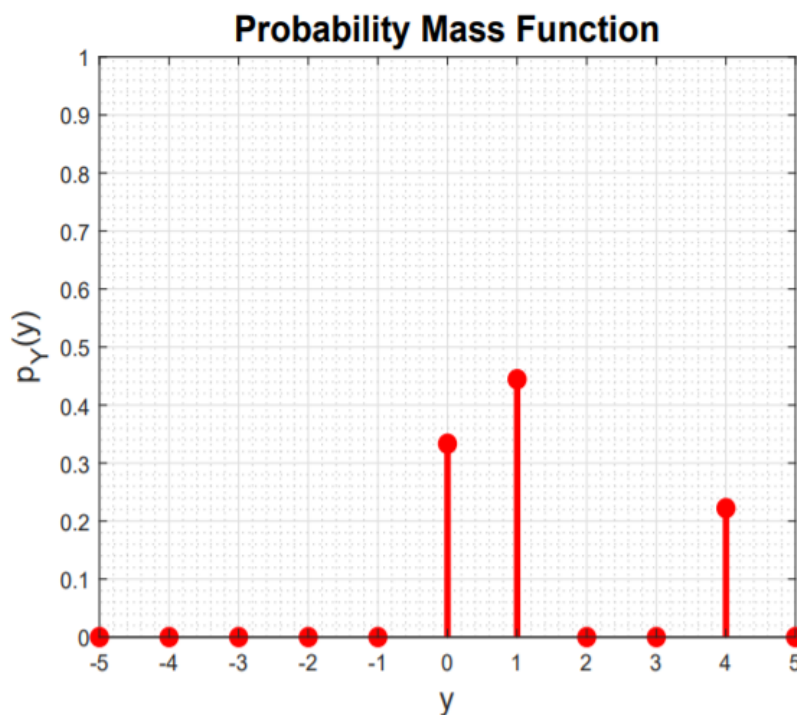
Επίσης, $\{Y = 0\} \leftrightarrow \{X = 0\}$, $\{Y = 1\} \leftrightarrow \{X = -1\} \cup \{X = 1\}$ και $\{Y = 4\} \leftrightarrow \{X = -2\} \cup \{X = 2\}$.
Ταιριάζοντας τις δυνατές τιμές του X και τις πιθανότητες τους με τις πιθανές τιμές του Y έχουμε:

$$p_Y(y) = \begin{cases} 2/9, & y = 4 \\ 4/9, & y = 1 \\ 3/9, & y = 0 \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases}$$

Παρατήρηση: Η $p_Y(y)$ είναι μία έγκυρη Συνάρτηση Πιθανότητας (Μάζας), καθώς ικανοποιεί τη Συνθήκη Κανονικοποίησης:

$$\sum_{y=0, y \neq 2, 3}^4 p_Y(y) = \frac{2}{9} + \frac{4}{9} + \frac{3}{9} = 1$$

Η γραφική της παράσταση (περιορισμένη στο διάστημα $[-5, 5]$) φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:

Σχήμα 2: Συνάρτηση Πιθανότητας (Μάζας) $p_Y(y)$ **Άσκηση 7**

Μαζί με εννιά φίλους σας σκοπεύετε να πάτε σε μία συναυλία. Οι τέσσερις από τους φίλους σας είναι και συμφοιτητές σας στο ΗΥ-217, ενώ οι υπόλοιποι πέντε δεν είναι. Δυστυχώς, το αυτοκίνητό σας χωράει μόνο πέντε επιβάτες. Οπότε, τυχαία, επιλέγετε να πάρετε μαζί σας τέσσερις από τους εννιά φίλους σας. Οι υπόλοιποι θα χάσουν τη συναυλία... :(

Με το που φτάνετε στη συναυλία, τυχαίνει όσοι παίρνουν το ΗΥ-217 να μπαίνουν δωρεάν :) , ενώ οι υπόλοιποι πληρώνουν από 10 ευρώ ο καθένας. Ορίζουμε την τυχαία μεταβλητή X ως το συνολικό ποσό που όλη η παρέα πληρώνει για να παρακολουθήσει τη συναυλία.

α) Ποιο είναι το πεδίο τιμών της τ.μ. X ;

β) Υπολογίστε τη συνάρτηση πιθανότητας, $p_X(x)$, της τ.μ. X .

γ) Υπολογίστε τη μέση τιμή, $E[X]$, της τ.μ. X .

δ) Αν αντί να μπαίνουν δωρεάν, οι φοιτητές του ΗΥ-217 πληρώνουν z ευρώ ο καθένας, ποιο είναι το νεό μέσο κόστος εισόδου στη συναυλία για την παρέα;

Λύση:

α) Ορίζουμε την τ.μ. Y ως τον αριθμό των φίλων που έρχονται στη συναυλία μαζί σας και οι οποίοι δεν είναι συμφοιτητές σας στο ΗΥ-217. Προφανώς, η τ.μ. Y παίρνει τις τιμές $Y = 0, 1, 2, 3, 4$, λόγω της χωρητικότητας του αυτοκινήτου. Άρα, αφού $X = 10 \cdot Y$, η τ.μ. X παίρνει τις τιμές $X = 0, 10, 20, 30, 40$.

β) Επιλέγετε τέσσερις από τους εννιά φίλους σας για να έρθουν μαζί σας στη συναυλία. Αυτό μπορεί να γίνει με $\binom{9}{4} = 126$ τρόπους. Από την άλλη, υπάρχουν $\binom{5}{Y} \cdot \binom{4}{4-Y}$ τρόποι να επιλέξετε Y φίλους σας που δεν είναι συμφοιτητές σας στο ΗΥ-217 και $4 - Y$ φίλους σας που είναι συμφοιτητές σας στο ΗΥ-217 για να έρθουν μαζί σας στη συναυλία.

Συνεπώς,

$$p_X(0) = P(X = 0) = P(Y = 0) = \frac{\binom{5}{0} \cdot \binom{4}{4}}{126} = \frac{1}{126}$$

$$p_X(10) = P(X = 10) = P(Y = 1) = \frac{\binom{5}{1} \cdot \binom{4}{3}}{126} = \frac{20}{126}$$

$$p_X(20) = P(X = 20) = P(Y = 2) = \frac{\binom{5}{2} \cdot \binom{4}{2}}{126} = \frac{60}{126}$$

$$p_X(30) = P(X = 30) = P(Y = 3) = \frac{\binom{5}{3} \cdot \binom{4}{3}}{126} = \frac{40}{126}$$

$$p_X(40) = P(X = 4) = P(Y = 4) = \frac{\binom{5}{4} \cdot \binom{4}{0}}{126} = \frac{5}{126}$$

Επομένως, η συνάρτηση πιθανότητας, $p_X(x)$, της τ.μ. X είναι:

$$p_X(x) = \begin{cases} 1/126, & x = 0 \\ 20/126, & x = 10 \\ 60/126, & x = 20 \\ 40/126, & x = 30 \\ 5/126, & x = 40 \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases}$$

γ) Η μέση τιμή, $E[X]$, της τ.μ. X , δηλαδή το μέσο κόστος για όλη την παρέα είναι:

$$E[X] = 0 \cdot \frac{1}{126} + 10 \cdot \frac{20}{126} + 20 \cdot \frac{60}{126} + 30 \cdot \frac{40}{126} + 40 \cdot \frac{5}{126} \simeq 22.22 \text{ ευρώ}$$

δ) Σε αυτήν την περίπτωση, έστω $\hat{X}$ η τ.μ. που εκφράζει το νέο κόστος εισόδου στη συναυλία για όλη την παρέα. Τώρα, ισχύει ότι:

$$\hat{X} = 10 \cdot Y + z(5 - Y) = X + 5z - \frac{z}{10} \cdot X = X \left(1 - \frac{z}{10}\right) + 5z$$

Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες της μέσης τιμής, προκύπτει ότι το νέο μέσο κόστος είναι:

$$E[\hat{X}] = E \left[X \left(1 - \frac{z}{10}\right) + 5z \right] = E[X] \left(1 - \frac{z}{10}\right) + 5z = 22.22 \left(1 - \frac{z}{10}\right) + 5z \text{ ευρώ}$$

Άσκηση 8 - Προγραμματιστική

Ο Στέφανος θέλει να φτιάξει ένα home cinema room. Όμως, δυστυχώς, τα λεφτά που μπορεί να διαθέσει είναι περιορισμένα: (. Συνεπώς, αποφασίζει να πάρει όσο καλύτερη οθόνη, ηχεία κτλ. μπορεί και να μην πάρει θέσεις/καρέκλες. Εξάλλου, αυτός και οι φίλοι του έχουν συνηθίσει από τα αμφιθέατρα και τίποτα δεν τους φαίνεται πολύ άβολο, πλέον. Επομένως, όταν μαζεύονται για ταινία φέρνουν **το πολύ 8** φορητές καρέκλες, π.χ. καρέκλες από την τραπεζαρία, τις οποίες, όμως, καμιά φορά βαριούνται να μαζέψουν. Δηλαδή, μπορεί να είναι 3 άτομα στο δωμάτιο και να υπάρχουν 7 καρέκλες. Προφανώς, πάντα θα πρέπει να υπάρχουν αρκετές καρέκλες για όλους τους θεατές.

Η παρέα του Στέφανου αποτελείται από 7 άτομα και τον ίδιο, δηλαδή συνολικά 8 άτομα. **Καλείστε να βρείτε όλους τους δυνατούς συνδυασμούς ανθρώπων-καρεκλών με τους οποίους μπορούν να καταλήξουν να βλέπουν ταινία.** Για παράδειγμα, 3 διαφορετικά ενδεχόμενα είναι:

- (κενή θέση) Στέφανος Μαρία Πέτρος (κενή θέση)
- Στέφανος (κενή θέση) Πέτρος Μαρία (κενή θέση)
- (κενή θέση) Στέφανος (κενή θέση) Δημήτρης Αντώνης

Προσοχή: μας ενδιαφέρει πόσοι και ποιοι θα βλέπουν την ταινία, το πώς θα είναι τοποθετημένοι(η σειρά) και το αν θα είναι, για παράδειγμα, 5 άτομα και 5 καρέκλες ή 3 άτομα και 8 καρέκλες στο χώρο, δηλαδή 4 πράγματα.

Tip: Σκεφτείτε ποια θα είναι όλα τα πιθανά ενδεχόμενα και, στη συνέχεια, αθροίστε όλους τους τρόπους που προκύπτουν σε κάθε ενδεχόμενο προκειμένου να βρείτε πόσοι δυνατοί συνδυασμοί ανθρώπων-καρεκλών υπάρχουν. Να αποθηκεύσετε τους τρόπους που προκύπτουν από κάθε ενδεχόμενο σε έναν διδιάστατο πίνακα (καρεκλών-ανθρώπων) και να σχολιάσετε, σύντομα, τα περιεχόμενα του.

Στην αναφορά σας, να περιλαμβάνεται ο παραπάνω πίνακας, το τελικό αποτέλεσμα και τα σχόλια που ζητούνται.

Μπορείτε, να χρησιμοποιήσετε MATLAB(προτεινόμενη), Python ή C. Για όσους χρησιμοποιήσουν MATLAB, η συνάρτηση `factorial()` θα σας φανεί χρήσιμη.

Λύση:

Ενδεικτικός Ψευδοκώδικας:

```

1 for friends = 1:max_number_of_friends
2   for chairs = friends:max_number_of_friends
3     combinations = C(max_number_of_friends, friends) * P(friends, friends) * C(chairs,
4     friends)
5   end
6 end

```

Όλοι οι δυνατοί συνδυασμοί ανθρώπων-καρεκλών με τους οποίους μπορούν να καταλήξουν να βλέπουν ταινία είναι: 1952448

Αυτό προκύπτει αθροίζοντας τα στοιχεία του παρακάτω ζητούμενου διδιάστατου πίνακα καρεκλών-ανθρώπων:

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 16 & 24 & 32 & 40 & 48 & 56 & 64 \\ 0 & 56 & 168 & 336 & 560 & 840 & 1176 & 1568 \\ 0 & 0 & 336 & 1344 & 3360 & 6720 & 11760 & 18816 \\ 0 & 0 & 0 & 1680 & 8400 & 25200 & 58800 & 117600 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6720 & 40320 & 141120 & 376320 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 20160 & 141120 & 564480 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 40320 & 322560 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 40320 \end{bmatrix}.$$

Ενδεικτικά Βασικά Σχόλια:

- Ο πίνακας που προκύπτει είναι άνω τριγωνικός διότι δεν μπορούμε να έχουμε λιγότερες καρέκλες από θέατές.
- Οι δυνατοί συνδυασμοί ανθρώπων-καρεκλών αυξάνονται όσο αυξάνεται ο αριθμός των διαθέσιμων καρεκλών, δηλαδή αυξάνονται οι τιμές του παραπάνω πίνακα από τα αριστερά προς τα δεξιά κατά μήκος μιας γραμμής, ενώ παρόμοια αύξηση δεν παρατηρείται πάντα αυξάνοντας τον αριθμό των ανθρώπων, δηλαδή δεν αυξάνονται, συνεχώς, οι τιμές του παραπάνω πίνακα από πάνω προς τα κάτω κατά ύψος μιας στήλης.
- Κάποιες τιμές στον πίνακα επαναλαμβάνονται. Για παράδειγμα, υπάρχουν 336 συνδυασμοί ανθρώπων-καρεκλών, είτε έχουμε 2 ανθρώπους και 4 καρέκλες, είτε έχουμε 3 ανθρώπους και 3 καρέκλες.