

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-217: Πιθανότητες - Χειμερινό εξάμηνο 2021-2022
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Σετ Ασκήσεων 2: Δεσμευμένη Πιθανότητα, Θεώρημα Ολικής
Πιθανότητας, Νόμος του Bayes, Ανεξαρτησία.

Ημερομηνία Ανάθεσης: 20/10/2021

Ημερομηνία Παράδοσης: 01/11/2021

Άσκηση 1

Έχει παρατηρηθεί ότι το ενδεχόμενο κάποια μέρα του χρόνου να βρέξει σχετίζεται με το ενδεχόμενο να έχει βρέξει και την προηγούμενη μέρα. Πιο συγκεκριμένα, έστω ότι οποιαδήποτε μέρα του χρόνου έχει πιθανότητα βροχής ίση με p , ενώ αν μία μέρα βρέξει τότε η επόμενη μέρα έχει πιθανότητα βροχής q . Υπολογίστε τις πιθανότητες:

1. Να βρέξει δύο συνεχόμενες μέρες.
2. Να βρέξει δύο συνεχόμενες μέρες αν γνωρίζουμε ότι είχε βροχή την πρώτη ημέρα.
3. Να βρέξει δύο συνεχόμενες μέρες αν γνωρίζουμε ότι τουλάχιστον μία από τις δύο έβρεξε σίγουρα.

Λύση

Έστω A_1, A_2 τα ενδεχόμενα να βρέξει την πρώτη και τη δεύτερη μέρα, αντίστοιχα. Τότε, το ενδεχόμενο $A_1 \cap A_2$ ισούται με βροχή και τις δύο ημέρες, ενώ το ενδεχόμενο $A_1 \cup A_2$ ισούται με βροχή τουλάχιστον μία ημέρα. Έχουμε

1.

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) = p \cdot q .$$

2.

$$P(A_1 \cap A_2|A_1) = P(A_2|A_1) = q ,$$

ή αλλιώς:

$$P(A_1 \cap A_2|A_1) = \frac{P(A_1 \cap A_2|A_1)P(A_1)}{P(A_1)} = \frac{P(A_1 \cap A_2 \cap A_1)}{P(A_1)} = \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_1)} = \frac{p \cdot q}{p} = q .$$

3.

$$P(A_1 \cap A_2|A_1 \cup A_2) = \frac{P((A_1 \cap A_2) \cap (A_1 \cup A_2))}{P(A_1 \cup A_2)} = \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_1 \cup A_2)} .$$

Επίσης, $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) = 2p - p \cdot q$ και επομένως,

$$\frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_1 \cup A_2)} = \frac{p \cdot q}{2p - p \cdot q} = \frac{q}{2 - q}$$

Άσκηση 2

Αγοράζετε μία καινούρια τηλεόραση από μία συγκεκριμένη εταιρία. Η εταιρία αυτή διαθέτει τρία εργοστάσια, όμως δεν είναι όλα το ίδιο εκσυγχρονισμένα. Πιο συγκεκριμένα, το εργοστάσιο A είναι το πιο σύγχρονο και παράγει κάθε μέρα 1000 τηλεοράσεις, από τις οποίες το 10% έχουν κάποιο ελάττωμα. Το εργοστάσιο B παράγει κάθε μέρα 500 τηλεοράσεις, από τις οποίες το 15% έχουν κάποιο ελάττωμα και το εργοστάσιο C παράγει κάθε μέρα 500 τηλεοράσεις, από τις οποίες το 20% έχουν κάποιο ελάττωμα. Αν δεν γνωρίζετε από ποιο εργοστάσιο κατασκευάστηκε η τηλεόρασή σας, υπολογίστε τις πιθανότητες:

1. Η τηλεόρασή σας να κατασκευάστηκε στο εργοστάσιο A .
2. Η τηλεόρασή σας να είναι ελαττωματική.
3. Αφού δοκιμάσετε την τηλεόραση, παρατηρείτε πράγματι κάποιο ελάττωμα. Ποια είναι η πιθανότητα η τηλεόρασή σας να κατασκευάστηκε στο εργοστάσιο A ;

Λύση

1.

$$P(A) = \frac{1000}{1000 + 500 + 500} = \frac{1000}{2000} = 0.5 .$$

2. Ορίζουμε το ενδεχόμενο $F = \{\text{η τηλεόραση είναι ελαττωματική}\}$.

$$\begin{aligned} P(F) &= P(F \cap A) + P(F \cap B) + P(F \cap C) \\ &= P(F|A)P(A) + P(F|B)P(B) + P(F|C)P(C) \\ &= 0.1 \cdot 0.5 + 0.15 \cdot 0.25 + 0.2 \cdot 0.25 \\ &= 0.1375 \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} P(A|F) &= \frac{P(A \cap F)}{P(F)} \\ &= \frac{P(F|A)P(A)}{P(F)} \\ &= \frac{0.1 \cdot 0.5}{0.1375} \\ &\approx 0.364 . \end{aligned}$$

Άσκηση 3

Ένας φίλος σας προτείνει να παίξετε ένα παιχνίδι τύχης, ως εξής. Χρησιμοποιείτε δύο δίκαια εξαέδρα ζάρια και τα ρίχνετε. Θεωρούμε ότι οι ρίψεις των δύο ζαριών είναι ανεξάρτητες. Αν το άθροισμα των ζαριών είναι 7 ή 11, τότε κερδίζετε έναν πόντο. Αν είναι 2, 3 ή 12 χάνετε έναν πόντο. Αν είναι κάποιος άλλος αριθμός χάνετε τη σειρά σας και παίζει ο επόμενος παίκτης.

1. Υπολογίστε την πιθανότητα να κερδίσετε έναν πόντο σε κάποια ρίψη.
2. Με δεδομένο ότι το ένα ζάρι ήρθε 3, ποια είναι η πιθανότητα να χάσετε έναν πόντο; Αν ήρθε 1 ;

Λύση

1. Ορίζουμε τα ενδεχόμενα A_i , $i = 1, \dots, 6$ το πρώτο ζάρι να φέρει τον αριθμό i , αντίστοιχα, και B_i , $i = 1, \dots, 6$ το δεύτερο ζάρι να φέρει τον αριθμό i . Εφόσον πρόκειται για δίκαια ζάρια, σε κάθε ζάρι η πιθανότητα να έρθει οποιοσδήποτε αριθμός είναι $P(A_i) = P(B_i) = \frac{1}{6} \forall i$. Επίσης, εφόσον οι ρίψεις των δύο ζαριών είναι ανεξάρτητες, οποιοσδήποτε συνδυασμός τους έχει πιθανότητα $P(A_i \cap B_j) = P(A_i)P(B_j) = \frac{1}{36}$.

Για να κερδίσουμε πρέπει να φέρουμε συνολικά 7 ή 11, το οποίο συμβαίνει όταν συμβεί κάποιο από τα ενδεχόμενα $A_1 \cap B_6$, $A_6 \cap B_1$, $A_2 \cap B_5$, $A_5 \cap B_2$, $A_3 \cap B_4$, $A_4 \cap B_3$, $A_5 \cap B_6$, $A_6 \cap B_5$, τα οποία είναι συνολικά 8. Επομένως, η πιθανότητα να κερδίσουμε σε έναν γύρο είναι $\frac{8}{36}$, δηλ. ο αριθμός των ενδεχομένων που κερδίζουν προς τον συνολικό αριθμό των ενδεχομένων. Εναλλακτικά:

$$\begin{aligned} & P[(A_i \cap B_j) \cap (i + j = 7 \cup i + j = 11)] = \\ & = \sum_{i,j} P(i + j = 7 \cup i + j = 11 | A_i \cap B_j) \cdot P(A_i \cap B_j) \end{aligned}$$

Όμως η πιθανότητα $P(i + j = 7 \cup i + j = 11 | A_i \cap B_j)$ είναι ίση με 1 όταν τα A_i, B_j είναι κάποιο από τα ζευγάρια που δώσαμε παραπάνω, αλλιώς είναι ίση με 0. Επίσης, η $P(A_i \cap B_j) = \frac{1}{36} \forall i, j$. Άρα,

$$\begin{aligned} & P[(A_i \cap B_j) \cap (i + j = 7 \cup i + j = 11)] = \\ & = \sum_{i,j} P(i + j = 7 \cup i + j = 11 | A_i \cap B_j) \cdot P(A_i \cap B_j) \\ & = P(A_1 \cap B_6) \cdot \frac{1}{36} + P(A_6 \cap B_1) \cdot \frac{1}{36} + P(A_2 \cap B_5) \cdot \frac{1}{36} + \dots \\ & = \frac{8}{36}. \end{aligned}$$

2. Για να φέρουμε συνολικά 2,3 ή 12, πρέπει να συμβεί κάποιο από τα ενδεχόμενα $A_1 \cap B_1$, $A_1 \cap B_2$, $A_2 \cap B_1$, $A_6 \cap B_6$. Επομένως, αν το ένα ζάρι ήρθε 3, δεν υπάρχει κάποιο ενδεχόμενο με πιθανότητα μεγαλύτερη του 0, στο οποίο χάνουμε. Αν όμως ήρθε 1, τότε κάνοντας τους υπολογισμούς όπως πριν,

$$\begin{aligned} & P[(A_i \cap B_j) \cap (i + j = 2 \cup i + j = 3 \cup i + j = 12) | i = 1 \cup j = 1] \\ & = P[(A_i \cap B_j) \cap (i + j = 2) | i = 1 \cup j = 1] + P[(A_i \cap B_j) \cap (i + j = 3) | i = 1 \cup j = 1] \\ & \quad + P[(A_i \cap B_j) \cap (i + j = 12) | i = 1 \cup j = 1] \\ & = \frac{P[(A_i \cap B_j) \cap (i + j = 2) \cap (i = 1 \cup j = 1)]}{P(i = 1 \cup j = 1)} + \frac{P[(A_i \cap B_j) \cap (i + j = 3) \cap (i = 1 \cup j = 1)]}{P(i = 1 \cup j = 1)} \\ & \quad + \frac{P[(A_i \cap B_j) \cap (i + j = 12) \cap (i = 1 \cup j = 1)]}{P(i = 1 \cup j = 1)} \\ & = \frac{P(A_1 \cap B_1)}{P(A_1 \cup B_1)} + \frac{P[(A_i \cap B_j) \cap ((i = 1 \cap j = 2) \cup (i = 2 \cap j = 1))]}{P(A_1 \cup B_1)} + 0 \\ & = \frac{P(A_1 \cap B_1)}{P(A_1 \cup B_1)} + \frac{P[(A_i \cap B_j) \cap (i = 1 \cap j = 2)]}{P(A_1 \cup B_1)} + \frac{P[(A_i \cap B_j) \cap (i = 2 \cap j = 1)]}{P(A_1 \cup B_1)} \\ & = \frac{P(A_1 \cap B_1)}{P(A_1 \cup B_1)} + \frac{P(A_1 \cap B_2)}{P(A_1 \cup B_1)} + \frac{P(A_2 \cap B_1)}{P(A_1 \cup B_1)} \\ & = \frac{P(A_1 \cap B_1) + P(A_1 \cap B_2) + P(A_2 \cap B_1)}{P(A_1 \cup B_1)} \\ & = \frac{P(A_1 \cap B_1) + P(A_1 \cap B_2) + P(A_2 \cap B_1)}{P(A_1) + P(B_1) - P(A_1 \cap B_1)} \\ & = \frac{3/36}{2/6 - 1/36} \\ & = \frac{3}{11} \end{aligned}$$

Μια πιο διαισθητική και γρήγορη απάντηση δίνεται ως εξής. Με δεδομένο ότι ένα ζάρι ήρθε '1', ο δειγματοχώρος μας διαμορφώνεται ως εξής: $\{A_1 \cap B_1, A_1 \cap B_2, A_1 \cap B_3, A_1 \cap B_4, A_1 \cap B_5, A_1 \cap B_6,$

$A_2 \cap B_1, A_3 \cap B_1, A_4 \cap B_1, A_5 \cap B_1, A_6 \cap B_1\}$, με πληθύνισμο 11. Από αυτό το σύνολο, τα ενδεχόμενα στα οποία χάνουμε είναι τα $\{A_1 \cap B_1, A_1 \cap B_2, A_2 \cap B_1\}$, με πληθύνισμο 3. Επομένως η πιθανότητα να χάσουμε πόντο αν ξέρουμε ότι το ένα ζάρι ήρθε '1', είναι $\frac{3}{11}$.

Άσκηση 4

1. Αποδείξτε την ακόλουθη πρόταση: Αν τα γεγονότα A και B είναι ανεξάρτητα και $B \subset A$, τότε $P(B) = 0$ ή $P(A) = 1$.
2. Ρίχνετε ένα εξαέδρο ζάρι n φορές. Έστω $n = 3$. Ορίζουμε τα γεγονότα $A = \{\text{έρχονται τουλάχιστον δύο '6'}\}$ και $B = \{\text{έρχεται ένα ή δύο '1' και οι υπόλοιπες ρίψεις έρχονται '6'}\}$. Είναι τα A και B ανεξάρτητα;
3. Επαναλάβετε το μέρος (2) για $n = 4$. Χρησιμοποιείστε το αποτέλεσμα του πρώτου ερωτήματος για να απαντήσετε γρηγορότερα.

Λύση

1. Καθώς τα A και B είναι ανεξάρτητα, $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Επίσης, αφού το B είναι υποσύνολο του A , $P(A \cap B) = P(B)$. Επομένως, $P(B) = P(A)P(B) \Leftrightarrow P(B) - P(A)P(B) = 0 \Leftrightarrow P(B)(1 - P(A)) = 0$ και συνεπώς $P(B) = 0$ ή $P(A) = 1$.
2. Συμβολίζουμε με $P(k, j, i)$ την πιθανότητα το πρώτο ζάρι να έρθει i , το δεύτερο j και το τρίτο k .

$$\begin{aligned} P(A) &= \sum_{i=1}^6 P(6, 6, i) + \sum_{j=1}^5 P(6, j, 6) + \sum_{k=1}^5 P(6, k, 6) \\ &= \sum_{i=1}^6 P(6, 6, i) + \sum_{j=1}^6 P(6, j, 6) - P(6, 6, 6) + \sum_{k=1}^6 P(6, k, 6) - P(6, 6, 6) \\ &= P(6, 6) + P(6, 6) + P(6, 6) - P(6, 6, 6) - P(6, 6, 6) \\ &= 3 \cdot \frac{1}{6^2} - 2 \cdot \frac{1}{6^3} \\ &= \frac{16}{216} \end{aligned}$$

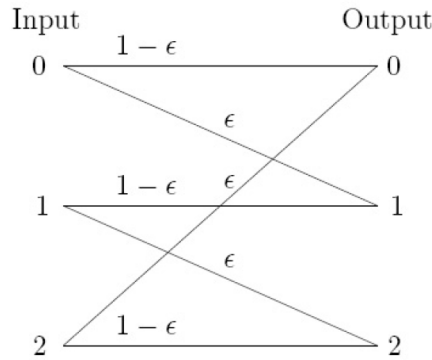
$$\begin{aligned} P(B) &= P(6, 6, 1) + P(6, 1, 6) + P(1, 6, 6) + P(1, 1, 6) + P(1, 6, 1) + P(6, 1, 1) \\ &= 6 \cdot \frac{1}{6^3} \\ &= \frac{1}{36} \end{aligned}$$

$$P(A \cap B) = P(1, 6, 6) + P(6, 1, 6) + P(6, 6, 1) = 3 \cdot \frac{1}{6^3} = \frac{1}{72}$$

Όμως, $P(A)P(B) = \frac{16}{216} \cdot \frac{1}{36} \neq \frac{1}{72} = P(A \cap B)$. Επομένως, τα A και B ΔΕΝ είναι ανεξάρτητα.

3. Το σύνολο A αποτελείται από τα εξής ενδεχόμενα: $A = \{66ij, 6i6j, 6ij6, i6j6, ij66\} \forall i, j \in [1, 6]$. Το σύνολο $B = \{1666, 6166, 6616, 6661, 1166, 1616, 1661, 6116, 6161, 6611\}$. Παρατηρούμε ότι $B \subset A$.
Αν τα A και B ήταν ανεξάρτητα τότε από το πρώτο ερώτημα θα έπρεπε να ισχύει: $P(B) = 0$ ή $P(A) = 1$. Αλλά προφανώς $P(B) > 0$, αφού το σύνολο B δεν είναι άδειο και $P(A) < 1$, αφού το σύνολο A δεν περιέχει όλες τις δυνατές ρίψεις. Άρα τα A και B ΔΕΝ είναι ανεξάρτητα!

Άσκηση 5



Σχήμα 1: Τριαδικό τηλεπικοινωνιακό κανάλι

Το διάγραμμα μετάβασης πιθανοτήτων ενός τριαδικού τηλεπικοινωνιακού καναλιού δίνεται στο Σχήμα 1. Όπως φαίνεται, η πιθανότητα να ληφθεί 0 (ή 1, ή 2) ενώ έχει σταλεί 0 (ή 1, ή 2, αντίστοιχα) είναι $1 - \epsilon$. Δηλαδή, $P(0 \text{ received} | 0 \text{ sent}) = P(1 \text{ received} | 1 \text{ sent}) = P(2 \text{ received} | 2 \text{ sent}) = 1 - \epsilon$. Ανάλογα, $P(0 \text{ received} | 2 \text{ sent}) = P(1 \text{ received} | 0 \text{ sent}) = P(2 \text{ received} | 1 \text{ sent}) = \epsilon$. Υποθέστε ότι τα τρία σύμβολα 0, 1, 2 στέλνονται με πιθανότητες $0, 1/2, 1/2$, αντίστοιχα. Δηλαδή δεν στέλνουμε ποτέ 0 και τα σύμβολα 1 και 2 τα στέλνουμε ισοπίθानα.

Ορίστε τα γεγονότα $A_i = \{\text{η είσοδος του καναλιού είναι } i\}$ και $B_i = \{\text{η έξοδος του καναλιού είναι } i\}$, $i = 0, 1, 2$.

1. Υπολογίστε τις πιθανότητες $P(B_i)$, $i = 0, 1, 2$.
2. Δεδομένου ότι ελήφθη 1 (δηλαδή συνέβη το γεγονός B_1), υπολογίστε τις πιθανότητες ότι εστάλη 0, ή 1, ή 2.

Λύση

1. Για να βρούμε τις πιθανότητες των B_i χρησιμοποιούμε το νόμο της ολικής πιθανότητας

$$\begin{aligned} P(B_0) &= P(B_0|A_0)P(A_0) + P(B_0|A_1)P(A_1) + P(B_0|A_2)P(A_2) \\ &= (1 - \epsilon) \cdot 0 + 0 \cdot \frac{1}{2} + \epsilon \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}\epsilon, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(B_1) &= P(B_1|A_0)P(A_0) + P(B_1|A_1)P(A_1) + P(B_1|A_2)P(A_2) \\ &= \epsilon \cdot 0 + (1 - \epsilon) \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}(1 - \epsilon), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(B_2) &= P(B_2|A_0)P(A_0) + P(B_2|A_1)P(A_1) + P(B_2|A_2)P(A_2) \\ &= 0 \cdot 0 + \epsilon \cdot \frac{1}{2} + (1 - \epsilon) \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Όπως είναι αναμενόμενο, το άθροισμα των B_i είναι 1.

2. Οι δεσμευμένες πιθανότητες είναι

$$\begin{aligned}P(A_0|B_1) &= \frac{P(A_0, B_1)}{P(B_1)} \\&= \frac{P(B_1|A_0)P(A_0)}{P(B_1)} \\&= \frac{\epsilon \cdot 0}{\frac{1}{2}(1 - \epsilon)} \\&= 0 ,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(A_1|B_1) &= \frac{P(A_1, B_1)}{P(B_1)} \\&= \frac{P(B_1|A_1)P(A_1)}{P(B_1)} \\&= \frac{(1 - \epsilon)\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}(1 - \epsilon)} \\&= 1 ,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(A_2|B_1) &= \frac{P(A_2, B_1)}{P(B_1)} \\&= \frac{P(B_1|A_2)P(A_2)}{P(B_1)} \\&= \frac{0\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}(1 - \epsilon)} \\&= 0 .\end{aligned}$$

Εξανά, παρατηρούμε ότι το άθροισμα των παραπάνω πιθανοτήτων είναι 1 (όπως ήταν αναμενόμενο).

Άσκηση 6

Το χρώμα των ματιών του ανθρώπου καθορίζεται από ένα ζευγάρι γονιδίων. Αν και τα δύο γονίδια είναι γονίδια γαλανού ματιού, το άτομο έχει γαλανά μάτια. Αν και τα δύο γονίδια είναι γονίδια καστανού ματιού, το άτομο έχει καστανά μάτια. Αν ένα από τα δύο γονίδια είναι γαλανού ματιού και το άλλο είναι καστανού ματιού, το άτομο έχει καστανά μάτια. Για αυτό το λόγο λέμε ότι το γονίδιο του καστανού ματιού είναι επικρατέστερο από το γονίδιο του γαλανού ματιού. Ένα παιδί λαμβάνει ένα γονίδιο χρώματος ματιού από κάθε γονέα ανεξάρτητα. Το γονίδιο που λαμβάνει από κάθε γονέα προέρχεται με πιθανότητα $1/2$ από τα δύο γονίδια χρώματος ματιού του γονέα.

Υποθέστε ότι ο η αδερφή και η μητέρα του Χρήστου έχουν γαλανά μάτια, ενώ ο Χρήστος και ο πατέρας του έχουν καστανά.

1. Ποια η πιθανότητα ότι ο Χρήστος έχει ένα γονίδιο γαλανού ματιού;
2. Υποθέστε ότι η σύζυγος του Χρήστου έχει γαλανά μάτια. Ποια η πιθανότητα ότι το πρώτο τους παιδί θα έχει καστανά μάτια;
3. Εάν το πρώτο τους παιδί έχει καστανά μάτια, ποια η πιθανότητα ότι το επόμενο παιδί τους θα έχει επίσης καστανά μάτια;

Λύση

Ο Χρήστος και ο πατέρας του έχουν σίγουρα τουλάχιστον ένα γονίδιο καστανού ματιού. Η αδερφή και η μητέρα του έχουν σίγουρα δύο γονίδια γαλανού ματιού. Συμβολίζουμε με $K = \{\text{γονίδιο καστανού χρώματος}\}$ και $\Gamma = \{\text{γονίδιο γαλανού χρώματος}\}$. Επίσης, συμβολίζουμε το ζευγάρι γονιδίων του Χρήστου με Z . Δηλαδή, $Z \in \{KK, K\Gamma, \Gamma K, \Gamma\Gamma\}$. Συμβολίζουμε με C το ενδεχόμενο να έχει ένα γονίδιο γαλανού ματιού ο Χρήστος. Τα καστανά μάτια προκύπτουν από τα ενδεχόμενα $Z = KK$, $Z = \Gamma K$ και $Z = K\Gamma$.

Συμπεραίνουμε ότι, αφού η αδερφή του Χρήστου έχει γαλανά μάτια, τότε και οι δυο γονείς της θα πρέπει να έχουν από τουλάχιστον ένα γονίδιο γαλανού ματιού. Αυτό για την μητέρα της είναι προφανές. Ο πατέρας έχει καστανά μάτια, άρα πρέπει να έχει ένα γονίδιο καστανού και ένα γονίδιο γαλανού ματιού.

1. Εφόσον η μητέρα του Χρήστου έχει δύο γονίδια γαλανού ματιού, ο Χρήστος έχει σίγουρα ένα γονίδιο γαλανού ματιού. Επομένως, $Z = \Gamma K \cup K\Gamma$ και $P(C) = 1$.
2. Συμβολίζουμε με FA το ζευγάρι των γονιδίων ματιών του πρώτου παιδιού και με T το ενδεχόμενο να έχει γαλανά μάτια. Η ζητούμενη πιθανότητα υπολογίζεται ως εξής.

$$\begin{aligned} P(T) &= P[(FA = K\Gamma] \cup (FA = \Gamma K)) \\ &= P[(FA = K\Gamma) \cup (FA = \Gamma K) \mid C]P(C) + P[(FA = K\Gamma) \cup (FA = \Gamma K) \mid C^c]P(C^c) \\ &= (P(FA = K\Gamma) + P(FA = \Gamma K))P(C) + 0 \\ &= \frac{2}{4} \cdot 1 \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

3. Συμβολίζουμε με FB το ζευγάρι των γονιδίων ματιών του πρώτου παιδιού και με H το ενδεχόμενο να έχει καστανά μάτια. Η ζητούμενη πιθανότητα υπολογίζεται ως εξής.

$$\begin{aligned} P(H|T^c) &= P(H|T^c, C)P(C|T^c) + P(H|T^c, C^c)P(C^c|T^c) \\ &= P(H|C)P(C) + P(H|C^c)P(C^c) \\ &= P(H|C) \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$