

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-217: Πιθανότητες - Χειμερινό εξάμηνο 2021-2022
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Σετ Ασκήσεων 2: Δεσμευμένη Πιθανότητα, Θεώρημα Ολικής
Πιθανότητας, Νόμος του Bayes, Ανεξαρτησία.

Ημερομηνία Ανάθεσης: 20/10/2021

Ημερομηνία Παράδοσης: 01/11/2021

ΣΗΜΑΝΤΙΚΕΣ ΟΔΗΓΙΕΣ

- Η παράδοση των ασκήσεών σας θα γίνεται ηλεκτρονικά, **ΑΠΟΚΛΕΙΣΤΙΚΑ** μέσω της σελίδας e-learn του μαθήματος, **εδώ**. Παραδόσεις με e-mail, ή οποιονδήποτε άλλον τρόπο δε θα γίνονται δεκτές και θα **μηδενίζονται**.
- Για την παράδοση, θα πρέπει να σκανάρετε ή να φωτογραφίσετε τις κόλλες των ασκήσεών σας και στη συνέχεια να φτιάξετε ένα PDF που θα περιλαμβάνει αυτές τις φωτογραφίες, δηλαδή το σύνολο της λυμένης σειράς ασκήσεων.
- Αριθμήστε τις σελίδες των ασκήσεών σας (από την άσκηση 1, στην άσκηση 2, στην άσκηση 3 κ.ο.κ.) και **ΣΙΓΟΥΡΕΥΤΕΙΤΕ** ότι τα σκανάρσματα που έχετε κάνει έχουν δημιουργήσει εικόνες στις οποίες είναι **ΕΥΔΙΑΚΡΙΤΕΣ** και **ΕΥΚΟΛΟΔΙΑΒΑΣΤΕΣ** οι λύσεις σας. Θολές, και γενικότερα θορυβώδεις, εικόνες ενδέχεται να καταστήσουν αδύνατη τη διαδικασία της διόρθωσης και κατ'επέκταση να οδηγήσουν σε μηδενισμό των ασκήσεών σας.

Άσκηση 1

Έχει παρατηρηθεί ότι το ενδεχόμενο κάποια μέρα του χρόνου να βρέξει σχετίζεται με το ενδεχόμενο να έχει βρέξει και την προηγούμενη μέρα. Πιο συγκεκριμένα, έστω ότι οποιαδήποτε μέρα του χρόνου έχει πιθανότητα βροχής ίση με p , ενώ αν μία μέρα βρέξει τότε η επόμενη μέρα έχει πιθανότητα βροχής q . Υπολογίστε τις πιθανότητες:

1. Να βρέξει δύο συνεχόμενες μέρες.
2. Να βρέξει δύο συνεχόμενες μέρες αν γνωρίζουμε ότι είχε βροχή την πρώτη ημέρα.
3. Να βρέξει δύο συνεχόμενες μέρες αν γνωρίζουμε ότι τουλάχιστον μία από τις δύο έβρεξε σίγουρα.

Άσκηση 2

Αγοράζετε μία καινούρια τηλεόραση από μία συγκεκριμένη εταιρία. Η εταιρία αυτή διαθέτει τρία εργοστάσια, όμως δεν είναι όλα το ίδιο εκσυγχρονισμένα. Πιο συγκεκριμένα, το εργοστάσιο A είναι το πιο σύγχρονο και παράγει κάθε μέρα 1000 τηλεοράσεις, από τις οποίες το 10% έχουν κάποιο ελάττωμα. Το εργοστάσιο B παράγει κάθε μέρα 500 τηλεοράσεις, από τις οποίες το 15% έχουν κάποιο ελάττωμα και το εργοστάσιο C παράγει κάθε μέρα 500 τηλεοράσεις, από τις οποίες το 20% έχουν κάποιο ελάττωμα. Αν δεν γνωρίζετε από ποιο εργοστάσιο κατασκευάστηκε η τηλεόρασή σας, υπολογίστε τις πιθανότητες:

1. Η τηλεόρασή σας να κατασκευάστηκε στο εργοστάσιο A .
2. Η τηλεόρασή σας να είναι ελαττωματική.
3. Αφού δοκιμάσετε την τηλεόραση, παρατηρείτε πράγματι κάποιο ελάττωμα. Ποια είναι η πιθανότητα η τηλεόρασή σας να κατασκευάστηκε στο εργοστάσιο A ;

Άσκηση 3

Ένας φίλος σας προτείνει να παίξετε ένα παιχνίδι τύχης, ως εξής. Χρησιμοποιείτε δύο δίκαια εξάεδρα ζάρια και τα ρίχνετε. Θεωρούμε ότι οι ρίψεις των δύο ζαριών είναι ανεξάρτητες. Αν το άθροισμα των ζαριών είναι 7 ή 11, τότε κερδίζετε έναν πόντο. Αν είναι 2, 3 ή 12 χάνετε έναν πόντο. Αν είναι κάποιος άλλος αριθμός χάνετε τη σειρά σας και παίζει ο επόμενος παίκτης.

1. Υπολογίστε την πιθανότητα να κερδίσετε έναν πόντο σε κάποια ρίψη.
2. Με δεδομένο ότι το ένα ζάρι ήρθε 3, ποια είναι η πιθανότητα να χάσετε έναν πόντο; Αν ήρθε 1 ;

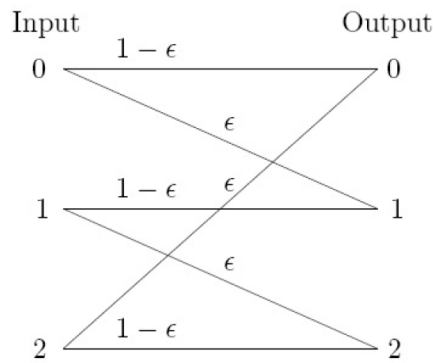
Άσκηση 4

1. Αποδείξτε την ακόλουθη πρόταση: Αν τα γεγονότα A και B είναι ανεξάρτητα και $B \subset A$, τότε $P(B) = 0$ ή $P(A) = 1$.
2. Ρίχνετε ένα εξάεδρο ζάρι n φορές. Έστω $n = 3$. Ορίζουμε τα γεγονότα $A = \{\text{έρχονται τουλάχιστον δύο '6'}\}$ και $B = \{\text{έρχεται ένα '1' και ένα '6'}\}$. Είναι τα A και B ανεξάρτητα ;
3. Επαναλάβετε το μέρος (2) για $n = 4$. Χρησιμοποιείστε το αποτέλεσμα του πρώτου ερωτήματος για να απαντήσετε γρηγορότερα.

Άσκηση 5

Το διάγραμμα μετάβασης πιθανοτήτων ενός τριαδικού τηλεπικοινωνιακού καναλιού δίνεται στο Σχήμα 1 παρακάτω. Όπως φαίνεται, η πιθανότητα να ληφθεί 0 (ή 1, ή 2) ενώ έχει σταλεί 0 (ή 1, ή 2, αντίστοιχα) είναι $1 - \epsilon$. Δηλαδή, $P(0 \text{ received} | 0 \text{ sent}) = P(1 \text{ received} | 1 \text{ sent}) = P(2 \text{ received} | 2 \text{ sent}) = 1 - \epsilon$. Ανάλογα, $P(0 \text{ received} | 2 \text{ sent}) = P(1 \text{ received} | 0 \text{ sent}) = P(2 \text{ received} | 1 \text{ sent}) = \epsilon$. Υποθέστε ότι τα τρία σύμβολα 0, 1, 2 στέλνονται με πιθανότητες 0, 1/2, 1/2, αντίστοιχα. Δηλαδή δεν στέλνουμε ποτέ 0 και τα σύμβολα 1 και 2 τα στέλνουμε ισοπύθανα.

Ορίστε τα γεγονότα $A_i = \{\text{η είσοδος του καναλιού είναι } i\}$ και $B_i = \{\text{η έξοδος του καναλιού είναι } i\}$, $i = 0, 1, 2$.



Σχήμα 1: Τριαδικό τηλεπικοινωνιακό κανάλι

1. Υπολογίστε τις πιθανότητες $P(Bi)$, $i = 0, 1, 2$.
2. Δεδομένου ότι ελήφθη 1 (δηλαδή συνέβη το γεγονός B_1), υπολογίστε τις πιθανότητες ότι εστάλη 0, ή 1, ή 2.

Άσκηση 6

Το χρώμα των ματιών του ανθρώπου καθορίζεται από ένα ζευγάρι γονιδίων. Αν και τα δύο γονίδια είναι γονίδια γαλανού ματιού, το άτομο έχει γαλανά μάτια. Αν και τα δύο γονίδια είναι γονίδια καστανού ματιού, το άτομο έχει καστανά μάτια. Αν ένα από τα δύο γονίδια είναι γαλανού ματιού και το άλλο είναι καστανού ματιού, το άτομο έχει καστανά μάτια. Για αυτό το λόγο λέμε ότι το γονίδιο του καστανού ματιού είναι επικρατέστερο από το γονίδιο του γαλανού ματιού. Ένα παιδί λαμβάνει ένα γονίδιο χρώματος ματιού από κάθε γονέα ανεξάρτητα. Το γονίδιο που λαμβάνει από κάθε γονέα προέρχεται με πιθανότητα $1/2$ από τα δύο γονίδια χρώματος ματιού του γονέα.

Υποθέστε ότι ο η αδερφή και η μητέρα του Χρήστου έχουν γαλανά μάτια, ενώ ο Χρήστος και ο πατέρας του έχουν καστανά.

1. Ποια η πιθανότητα ότι ο Χρήστος έχει ένα γονίδιο γαλανού ματιού;
2. Υποθέστε ότι η σύζυγος του Χρήστου έχει γαλανά μάτια. Ποια η πιθανότητα ότι το πρώτο τους παιδί θα έχει καστανά μάτια;
3. Εάν το πρώτο τους παιδί έχει καστανά μάτια, ποια η πιθανότητα ότι το επόμενο παιδί τους θα έχει επίσης καστανά μάτια;