

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2021-2022
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Λύσεις Πρώτης Σειράς Ασκήσεων

Άσκηση 1. α) Ο δειγματικός χώρος Ω αποτελείται από όλες τις πιθανές τριάδες παιδιών (έχει σημασία η σειρά). Έτσι έχουμε:

$$\Omega = \{AAA, AAK, AKA, AKK, KAA, KAK, KKA, KKK\}$$

$$\beta) A = \{AAA, AAK, AKA, KAA\}$$

$$B = \{KAA, KAK, KKA, KKK\}$$

$$C = \{AAA, KKK\}$$

Άσκηση 2. Ένας τρόπος να λυθεί η άσκηση είναι να ορίσουμε ως a τον αριθμό των αεροπλάνων που περιμένουν να προσγειωθούν. Τότε τα δεδομένα σύνολα μπορούν να γραφτούν ως εξής:

$$A = \{a \in \mathbb{N} : a \geq 5\} \quad \text{και} \quad A^c = \{a \in \mathbb{N} : a \leq 4\}$$

$$B = \{a \in \mathbb{N} : a \leq 3\} \quad \text{και} \quad B^c = \{a \in \mathbb{N} : a \geq 4\}$$

$$C = \{a \in \mathbb{N} : a \leq 2\} \quad \text{και} \quad C^c = \{a \in \mathbb{N} : a \geq 3\}$$

$$D = \{a = 2\} \quad \text{και} \quad D^c = \{a \in \mathbb{N} : a \geq 3 \text{ ή } a \leq 1\}$$

Άρα τα ζητούμενα σύνολα γράφονται ως:

$$1. E = \{a \in \mathbb{N} : a \leq 4\} = A^c \checkmark$$

$$2. F = \{a \in \mathbb{N} : a \leq 1\}$$

Ένας τρόπος γραφής θα ήταν να χρησιμοποιήσουμε το D^c αποκλείοντας όμως την περίπτωση $a \geq 3$. Αυτό μπορεί να γίνει παίρνοντας πχ. την τομή του με το C αφού:

$$C \cap D^c = \{a \in \mathbb{N} : a \leq 2\} \cap \{a \in \mathbb{N} : a \geq 3 \text{ ή } a \leq 1\} = \{a \in \mathbb{N} : a \leq 1\}$$

$$\text{Άρα } F = C \cap D^c \checkmark$$

$$3. G = \{a = 3\} = \{a \in \mathbb{N} : a \leq 3\} \cap \{a \in \mathbb{N} : a \geq 3\} = B \cap C^c \checkmark$$

$$4. H = \{a = 4\} = \{a \in \mathbb{N} : a \leq 4\} \cap \{a \in \mathbb{N} : a \geq 4\} = A^c \cap B^c \checkmark$$

$$5. I = \{a \in \mathbb{N} : a \geq 4\} = B^c \checkmark$$

Άσκηση 3. α) Έχουμε:

$$A \subseteq A \cup B \Rightarrow P(A) \leq P(A \cup B) \Rightarrow \frac{3}{4} \leq P(A \cup B)$$

$$\text{και } P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{3}{4} + \frac{3}{8} - P(A \cup B)$$

$$\text{όμως } \frac{3}{4} \leq P(A \cup B) \leq 1 \quad \text{άρα:}$$

$$\frac{3}{4} + \frac{3}{8} - 1 \leq P(A \cap B) \leq \frac{3}{4} + \frac{3}{8} - \frac{3}{4} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{8} \leq P(A \cap B) \leq \frac{3}{8}$$

$$\beta) A, B \subseteq A \cup B \Rightarrow P(A) \leq P(A \cup B) \Rightarrow \frac{3}{4} \leq P(A \cup B)$$

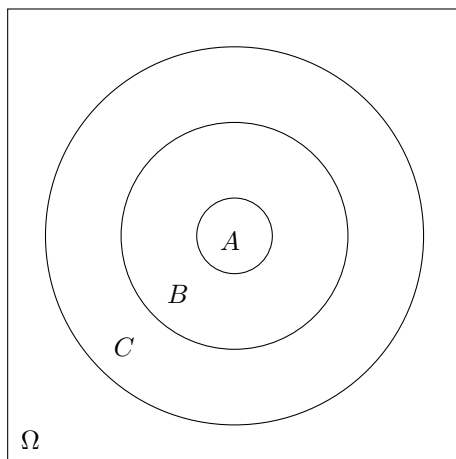
$$\text{και } P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{3}{4} + \frac{3}{4} - P(A \cup B)$$

$$\text{όμως } \frac{3}{4} \leq P(A \cup B) \leq 1 \quad \text{άρα:}$$

$$\frac{3}{4} + \frac{3}{4} - 1 \leq P(A \cap B) \leq \frac{3}{4} + \frac{3}{4} - \frac{3}{4} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} \leq P(A \cap B) \leq \frac{3}{4}$$

γ) Διαγραμματικά τα σύνολα έχουν ως εξής:



Άρα μπορούμε εύκολα να παρατηρήσουμε γραμμοστιάζοντας ότι:

1. $A^c \cap B = B - A \Rightarrow P(A^c \cap B) = P(B - A) = P(B) - P(A) = \frac{5}{12} - \frac{1}{4} = \frac{1}{6}$
2. $A^c \cap C = C - A \Rightarrow P(A^c \cap C) = P(C - A) = P(C) - P(A) = \frac{7}{12} - \frac{1}{4} = \frac{1}{3}$
3. $B^c \cap C = C - B \Rightarrow P(B^c \cap C) = P(C - B) = P(C) - P(B) = \frac{7}{12} - \frac{5}{12} = \frac{1}{6}$
4. $A \cap B^c \cap C^c = \emptyset \Rightarrow P(A \cap B^c \cap C^c) = 0$
5. $A^c \cap B^c \cap C^c = C^c \Rightarrow P(A^c \cap B^c \cap C^c) = P(C^c) = 1 - P(C) = 1 - \frac{7}{12} = \frac{5}{12}$

Άσκηση 4. α) Αν ονομάσουμε A το ενδεχόμενο «τα δυο αποτελέσματα έχουν άθροισμα 4» τότε έχουμε:
 $A = \{(1,3), (2,2), (3,1)\}$

β) Η πιθανότητα του A θα είναι:

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

γ) Ονομάζουμε B το ενδεχόμενο «το άθροισμα των ενδείξεων να διαιρείται με το 3». Τα πιθανά αθροίσματα των ενδείξεων των δυο ζαριών είναι 2, 3, ..., 12. Από αυτά τα μόνα που διαιρούνται με το 3 είναι τα 3, 6, 9, 12. Επομένως αρκεί να βρούμε τις περιπτώσεις που το άθροισμα των δύο ενδείξεων ισούται με 3, 6, 9 ή 12. Αυτές είναι:

(1,2), (2,1), (1,5), (5,1), (2,4), (4,2), (3,3), (3,6), (6,3), (4,5), (5,4), (6,6) και άρα:

$$B = \{(1,2), (2,1), (1,5), (5,1), (2,4), (4,2), (3,3), (3,6), (6,3), (4,5), (5,4), (6,6)\}$$

$$\text{Οπότε } P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

Άσκηση 5. Για να βρούμε την πιθανότητα η μπάλα να είναι κίτρινη ή να έχει ρίγες σκεφτόμαστε ως εξής: Ονομάζουμε A το ενδεχόμενο η μπάλα να είναι κίτρινη και B το ενδεχόμενο η μπάλα να έχει ρίγες. Το ζητούμενο, λοιπόν, είναι το $P(A \cup B)$. Ξέρουμε ότι:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A) = P(\text{η μπάλα είναι κίτρινη}) = 20\%$$

$$P(B) = P(\text{η μπάλα έχει ρίγες}) = 15\% + 5\% = 20\%$$

$$P(A \cap B) = P(\text{η μπάλα είναι κίτρινη ΚΑΙ έχει ρίγες}) = 0$$

$$\text{Άρα } P(A \cup B) = 40\%$$

Για το δεύτερο ερώτημα τώρα δουλεύουμε ανάλογα: Ονομάζουμε C το ενδεχόμενο η μπάλα να είναι κοκκινή και ψάχνουμε το $P(C \cup B)$

$$P(C \cup B) = P(C) + P(B) - P(C \cap B)$$

$$P(C) = P(\text{η μπάλα είναι κόκκινη}) = 30\% + 5\% = 35\% (\text{οι κόκκινες με ρίγες συμπεριλαμβάνονται στις κόκκινες})$$

$$P(B) = P(\text{η μπάλα έχει ρίγες}) = 15\% + 5\% = 20\%$$

$$P(C \cap B) = P(\text{η μπάλα είναι κόκκινη ΚΑΙ έχει ρίγες}) = 5\%$$

$$\text{Άρα } P(C \cup B) = 50\%$$

Άσκηση 6.

```
import random
```

```
N=1000 #Πλήθος φορών που εκτελούμε το πείραμα
```

```
counter = 0 # Πόσες φορές συνέβη το ενδεχόμενο που κοιτάμε, αρχικά 0
```

```
for i in range(N): #εκτελούμε N φορές το πείραμα: ρίχνουμε δύο ζάρια και κοιτάμε πότε τα δύο αποτελέσματα είναι ίδια
```

```
    x = random.randint(1,6); y = random.randint(1,6) #εδώ παράγουμε δύο τυχαίους ακεραίους από 1 έως 6
```

```
    if x==y: #το ενδεχόμενο ισχύει
```

```
        counter += 1 #αυξάνουμε το μετρητή κατά 1
```

```
frequency = counter/N # με τι συχνότητα συνέβη το ενδεχόμενο αυτό
```

```
print("Το ενδεχόμενο συνέβη με συχνότητα {}".format(frequency))
```