

Άσκηση 1

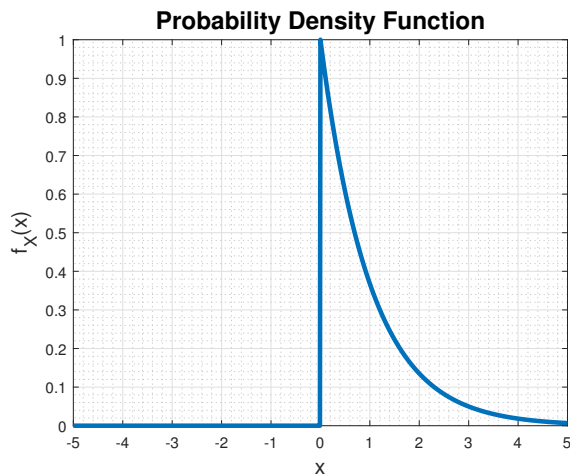
Έστω ότι η διάρκεια ζωής σε χρόνια μίας οθόνης Η/Υ μοντελοποιείται ως μία συνεχής Τ.Μ. X , με Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας PDF που δίνεται από τον παρακάτω τύπο:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ e^{-x} & x \geq 0 \end{cases}$$

- (i) Να σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της $f_X(x)$.
- (ii) Να αποδείξετε ότι ισχύει η Συνθήκη Κανονικοποίησης: $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = 1$.
- (iii) Να υπολογιστεί η πιθανότητα $P(1 \leq X \leq 2)$.
- (iv) Να υπολογιστεί η Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής (ΑΣΚ) (CDF), $F_X(x)$, και να γίνει η γραφική της παράσταση.
- (v) Να υπολογιστεί η πιθανότητα $P(X \geq 1)$.

Λύση

- (i) Σχεδιάζοντας κάθε κλάδο της $f_X(x)$ στα αντίστοιχα διαστήματα, λαμβάνουμε την γραφική παράσταση (περιορισμένη στο διάστημα $[-5, 5]$) που φαίνεται στο Σχήμα 1.



Σχήμα 1: Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας $f_X(x)$.

- (ii) Η $f_X(x)$ είναι μία έγκυρη Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας, καθώς ικανοποιεί την Συνθήκη Κανονικοποίησης:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx &= \int_{-\infty}^0 f_X(x)dx + \int_0^{+\infty} f_X(x)dx = \int_{-\infty}^0 0dx + \int_0^{+\infty} e^{-x}dx \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-x}dx = -\left[e^{-x}\right]_0^{+\infty} = -(0 - 1) = 1 \end{aligned}$$

- (iii) Για τον υπολογισμό της ζητούμενης πιθανότητας, ελέγχουμε σε ποιον κλάδο της $f_X(x)$ αντιστοιχεί το προς εξέταση γεγονός, και έχουμε:

$$P(1 \leq X \leq 2) = \int_1^2 f_X(x)dx = \int_1^2 e^{-x}dx = -\left[e^{-x}\right]_1^2 = e^{-1} - e^{-2}$$

- (iv) Με γνωστή την Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας, η Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής δίνεται από τον εξής τύπο:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t)dt$$

Σύμφωνα με τον τύπο της δοσμένης Συνάρτησης Πυκνότητας Πιθανότητας, θεωρούμε τις εξής περιπτώσεις:

(a) Για $x < 0 \Leftrightarrow F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t)dt = \int_{-\infty}^x 0dt = 0$

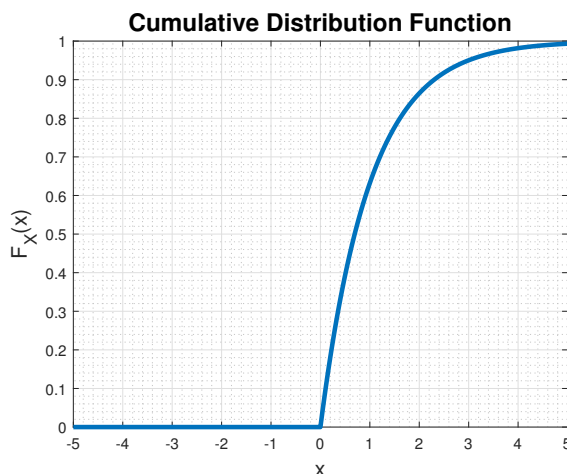
(b) Για $x \geq 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \int_{-\infty}^x f_X(t)dt = \int_{-\infty}^0 f_X(t)dt + \int_0^x f_X(t)dt = \int_{-\infty}^0 0dt + \int_0^x e^{-t}dt \\ &= \int_0^x e^{-t}dt = -\left[e^{-t}\right]_0^x = -(e^{-x} - e^0) = 1 - e^{-x} \end{aligned}$$

Άρα, η Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής (CDF) θα είναι τελικά:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - e^{-x} & x \geq 0 \end{cases}$$

Σχεδιάζοντας κάθε κλάδο της $F_X(x)$ στα αντίστοιχα διαστήματα, λαμβάνουμε την γραφική παράσταση (περιορισμένη στο διάστημα $[-5, 5]$) που φαίνεται στο Σχήμα 2.



Σχήμα 2: Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής $F_X(x)$.

- (v) Για τον υπολογισμό της ζητούμενης πιθανότητας, ελέγχουμε σε ποιον κλάδο της $f_X(x)$ αντιστοιχεί το προς εξέταση γεγονός, και έχουμε:

$$P(X \geq 1) = \int_1^{+\infty} f_X(x)dx = \int_1^{+\infty} e^{-x}dx = -\left[e^{-x}\right]_1^{+\infty} = e^{-1}$$

Άσκηση 2

Έστω συνεχής Τ.Μ. X , με Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής (ΑΣΚ) (CDF) που δίνεται από τον παρακάτω τύπο:

$$F_X(x) = \begin{cases} c - \frac{4}{x^2} & x \geq 2 \\ 0 & x < 2 \end{cases},$$

όπου c σταθερά με $c \in \mathbb{R}$. Να υπολογιστούν:

- (i) Η σταθερά c .
- (ii) Η Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας (ΣΠΠ) της Τ.Μ. X , $f_X(x)$.
- (iii) Η μέση τιμή της Τ.Μ. X , $E[X]$.

Λύση

Παρατήρηση: Στην περίπτωση που δίνεται η Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής μίας Τ.Μ. X , και όχι η Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας αυτής, η Συνθήκη Κανονικοποίησης λαμβάνει την ακόλουθη μορφή:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1 \end{cases}$$

- (i) Σύμφωνα με την θεωρία, θα πρέπει να ισχύει η Συνθήκη Κανονικοποίησης. Με βάση την δοσμένη Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής, έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(c - \frac{4}{x^2} \right) = 1 \Leftrightarrow \boxed{c = 1}$$

Άρα, τελικά, η Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής (ΑΣΚ) (CDF) θα δίνεται από τον τύπο:

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - \frac{4}{x^2} & x \geq 2 \\ 0 & x < 2 \end{cases}$$

- (ii) Με γνωστή την Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής, η Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας δίνεται από τον εξής τύπο:

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$$

Με βάση την δοσμένη Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής, έχουμε:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{8}{x^3} & x \geq 2 \\ 0 & x < 2 \end{cases}$$

- (iii) Με βάση τον τύπο ορισμού της μέσης τιμής, έχουμε:

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx = \int_2^{+\infty} x f_X(x) dx = \int_2^{+\infty} x \cdot \left(\frac{8}{x^3} \right) dx \\ &= \int_2^{+\infty} \frac{8}{x^2} dx = 8 \left[-\frac{1}{x} \right]_2^{+\infty} = 8 \left(0 + \frac{1}{2} \right) = \frac{8}{2} = 4 \end{aligned}$$

Άσκηση 3

Έστω συνεχής Τ.Μ. X , η οποία ακολουθεί την Εκθετική Κατανομή με $E[X] = 1$.

- (i) Να υπολογιστεί η Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής (ΑΣΚ) (CDF), $F_X(x)$.
- (ii) Να υπολογιστεί η πιθανότητα $P(X < 1)$.
- (iii) Να υπολογιστεί η πιθανότητα $P(X \geq 1)$.
- (iv) Αν ισχύει η σχέση $P(X > c) = 0.95$, όπου c σταθερά με $c \in \mathbb{R}$, να υπολογιστεί η σταθερά c .

Λύση

- (i) Από την θεωρία γνωρίζουμε ως όταν η συνεχής Τ.Μ. X ακολουθεί Εκθετική Κατανομή, η Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας (ΣΠΠ) (PDF) αυτής θα δίνεται από τον παρακάτω τύπο:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \lambda \cdot e^{-\lambda x} & x \geq 0 \end{cases}$$

Επίσης, είναι γνωστό πως όταν η συνεχής Τ.Μ. X ακολουθεί Εκθετική Κατανομή, η μέση τιμή της δίνεται από τον τύπο:

$$E[X] = \frac{1}{\lambda}$$

Με βάση την παραπάνω σχέση, και δεδομένου ότι $E[X] = 1$ από την εκφώνηση της άσκησης, έχουμε:

$$E[X] = 1 \Rightarrow \frac{1}{\lambda} = 1 \Rightarrow \lambda = 1$$

Άρα, η Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας (ΣΠΠ) (PDF) θα είναι τελικά:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ e^{-x} & x \geq 0 \end{cases}$$

Με γνωστή την Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας, η Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής δίνεται από τον εξής τύπο:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt$$

Σύμφωνα με τον τύπο της δοσμένης Συνάρτησης Πυκνότητας Πιθανότητας, θεωρούμε τις εξής περιπτώσεις:

(a) Για $x < 0 \Leftrightarrow F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0$

(b) Για $x \geq 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \int_{-\infty}^x f_X(t) dt = \int_{-\infty}^0 f_X(t) dt + \int_0^x f_X(t) dt = \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^x e^{-t} dt \\ &= \int_0^x e^{-t} dt = -\left[e^{-t}\right]_0^x = -(e^{-x} - e^0) = 1 - e^{-x} \end{aligned}$$

Άρα, η Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής (CDF) θα είναι τελικά:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - e^{-x} & x \geq 0 \end{cases}$$

- (ii) Για τον υπολογισμό της ζητούμενης πιθανότητας, ελέγχουμε σε ποιον κλάδο της $f_X(x)$ αντιστοιχεί το προς εξέταση γεγονός, και έχουμε:

$$P(X < 1) = \int_{-\infty}^1 f_X(x) dx = \int_{-\infty}^0 0 dx + \int_0^1 e^{-x} dx = \int_0^1 e^{-x} dx = -\left[e^{-x}\right]_0^1 = -(e^{-1} - e^0) = 1 - e^{-1}$$

- (iii) Εκμεταλλευόμενοι βασικές έννοιες της θεωρίας πιθανοτήτων, έχουμε:

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - (1 - e^{-1}) = 1 - 1 + e^{-1} = e^{-1}$$

- (iv) Εκμεταλλευόμενοι τις ιδιότητες της Συνάρτησης Πυκνότητας Πιθανότητας, έχουμε:

$$\begin{aligned} P(X > c) = 0.95 &\Rightarrow \int_c^{+\infty} f_X(x) dx = 0.95 \Rightarrow \int_c^{+\infty} e^{-x} dx = 0.95 \\ &\Rightarrow -\left[e^{-x}\right]_c^{+\infty} = 0.95 \Rightarrow -(0 - e^{-c}) = 0.95 \Rightarrow e^{-c} = 0.95 \\ &\Rightarrow -c = \ln(0.95) \Rightarrow c = -\ln(0.95) \Rightarrow c = -(-0.0513) \Rightarrow c = 0.0513 \end{aligned}$$

Άσκηση 4

Έστω X συνεχής Τ.Μ. με Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας (ΣΠΠ) (PDF) που δίνεται από τον παρακάτω τύπο:

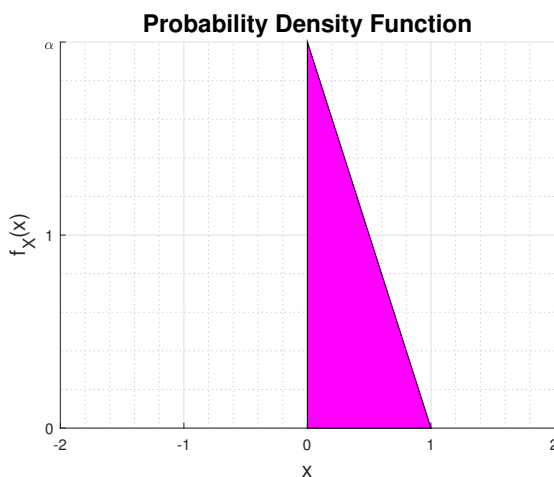
$$f_X(x) = \begin{cases} \alpha(1-x) & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases},$$

όπου α σταθερά με $\alpha \in \mathbb{R}$

- (i) Να σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της $f_X(x)$.
- (ii) Να υπολογιστεί η σταθερά α .
- (iii) Να υπολογιστεί η πιθανότητα $P(6X^2 > 5X - 1)$.

Λύση

- (i) Σχεδιάζοντας κάθε κλάδο της $f_X(x)$ στα αντίστοιχα διαστήματα, λαμβάνουμε την γραφική παράσταση (περιορισμένη στο διάστημα $[-2, 2]$) που φαίνεται στο Σχήμα 3.



Σχήμα 3: Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας $f_X(x)$.

- (ii) Για να είναι η $f_X(x)$ είναι μία έγκυρη Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας, θα πρέπει να ικανοποιεί την Συνθήκη Κανονικοποίησης:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx &= 1 \Leftrightarrow \int_{-\infty}^0 f_X(x)dx + \int_0^1 f_X(x)dx + \int_1^{+\infty} f_X(x)dx = 1 \\ &\Leftrightarrow \int_{-\infty}^0 0dx + \int_0^1 \alpha(1-x)dx + \int_1^{+\infty} 0dx = 1 \\ &\Leftrightarrow \int_0^1 \alpha(1-x)dx = 1 \Leftrightarrow \alpha \left(\left[x \right]_0^1 - \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 \right) = 1 \\ &\Leftrightarrow \alpha \left[\left(1 - 0 \right) - \left(\frac{1}{2} - 0 \right) \right] = 1 \Leftrightarrow \alpha \left(1 - \frac{1}{2} \right) = 1 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{2} = 1 \Leftrightarrow \boxed{\alpha = 2}\end{aligned}$$

Παρατήρηση: Η προσδιοριστέα σταθερά α θα μπορούσε να υπολογιστεί εναλλακτικά, απαιτώντας το εμβαδόν μεταξύ της $f_X(x)$ και του άξονα x' να ισούται με 1:

$$E_{\text{Τριγώνου}} = 1 \Leftrightarrow \frac{1 \cdot \alpha}{2} = 1 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{2} = 1 \Leftrightarrow \boxed{\alpha = 2}$$

Άρα, τελικά, η Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας, $f_X(x)$, θα δίνεται από τον τύπο:

$$f_X(x) = \begin{cases} 2(1-x) & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

- (iii) Για τον υπολογισμό της ζητούμενης πιθανότητας, έχουμε:

$$\begin{aligned}P(6X^2 > 5X - 1) &= P(6X^2 - 5X + 1 > 0) = P\left[6\left(X - \frac{1}{2}\right)\left(X - \frac{1}{3}\right) > 0\right] \\ &= P(X > 1/2) + P(X < 1/3) = \int_{\frac{1}{2}}^1 f_X(x)dx + \int_0^{\frac{1}{3}} f_X(x)dx \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^1 2(1-x)dx + \int_0^{\frac{1}{3}} 2(1-x)dx \\ &= 2\left(\left[x\right]_{\frac{1}{2}}^1 - \left[\frac{x^2}{2}\right]_{\frac{1}{2}}^1\right) + 2\left(\left[x\right]_0^{\frac{1}{3}} - \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{1}{3}}\right) \\ &= 2\left[\left(1 - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8}\right)\right] + 2\left[\left(\frac{1}{3} - 0\right) - \left(\frac{1}{18} - 0\right)\right] \\ &= 2\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{8}\right) + 2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{18}\right) = 2\left(\frac{1}{8}\right) + 2\left(\frac{5}{18}\right) = \frac{1}{4} + \frac{5}{9} = \frac{29}{36}\end{aligned}$$

Άσκηση 5

Η ποσότητα X του καφέ που βρίσκεται σε πακέτα των 500 γρ. είναι τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή 500 και διασπορά 25, $X \sim N(500, 25)$. Αγοράζουμε τρία πακέτα των 500 γρ. . Ποια είναι η πιθανότητα:

- α) ένα μόνο πακέτο από τα τρία να περιέχει τουλάχιστον 490 γρ. καφέ;
 β) το καθένα από τα τρία να έχει βάρος μεταξύ 490 και 505 γρ.;

Εκφράστε την απάντησή σας βάσει των τιμών $\Phi(2) = 0.9772$ και $\Phi(1) = 0.8413$ της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής της τυπικής Γκαουσιανής.

Λύση

Ισχύει ότι $X \sim N(500, 25)$, άρα $Z = \frac{X-500}{5} \sim N(0, 1)$.

α) Έχουμε

$$P(X \geq 490) = P\left(\frac{X-500}{5} \geq \frac{490-500}{5}\right) = P(Z \geq -2) = 1 - P(Z \leq -2) = 1 - \Phi(-2) = 0.9772$$

Επομένως

$$P(1 \text{ από τα 3 πακέτα έχει βάρος } \geq 490) = \binom{3}{1} (0.9772)^1 (1 - 0.9772)^2 = 0.001524$$

β) Έχουμε

$$\begin{aligned} P(490 \leq X \leq 505) &= P\left(\frac{490-500}{5} \leq \frac{X-500}{5} \leq \frac{505-500}{5}\right) = P(-2 \leq Z \leq 1) = \\ &= \Phi(1) - \Phi(-2) = \Phi(1) + \Phi(2) - 1 = 0.8413 + 0.9772 - 1 = 0.8185 \end{aligned}$$

Επομένως

$$P(\text{και τα 3 πακέτα είναι μεταξύ 490 και 505 γρ.}) = (0.8185)^3 = 0.54837$$

Άσκηση 6

Η εσωτερική διάμετρος (σε ίντσες) των σωληνών από χαλκό που παράγει ένα εργοστάσιο ακολουθεί την κανονική κατανομή $N(10, \sigma^2)$. Σωλήνες με εσωτερική διάμετρο εκτός των ορίων 10 ± 0.1 ίντσες ανακυκλώνονται.

- α) Αν $\sigma = 0.1$, να βρεθεί η πιθανότητα να ανακυκλωθούν ακριβώς τρεις σωλήνες σε ένα δείγμα πέντε σωληνών που επιλέγεται τυχαία από την παραγωγή του εργοστασίου.
 β) Πόση θα πρέπει να γίνει η παράμετρος σ^2 έτσι ώστε η πιθανότητα ανακύκλωσης ενός σωλήνα να είναι 0.06;

Λύση

Έστω η τ.μ. X που αναπαριστά την εσωτερική διάμετρο των σωληνών. Τότε $X \sim N(10, \sigma^2)$. Η πιθανότητα ανακύκλωσης των σωληνών είναι

$$\begin{aligned} p &= P(\{X > 10.1\} \cup \{X < 9.9\}) = 1 - P(9.9 < X < 10.1) \\ &= 1 - P\left(\frac{9.9-10}{\sigma} < \frac{X-10}{\sigma} < \frac{10.1-10}{\sigma}\right) \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{0.1}{\sigma}\right) + \Phi\left(-\frac{0.1}{\sigma}\right) \\ &= 2\left(1 - \Phi\left(\frac{0.1}{\sigma}\right)\right) \end{aligned}$$

α) Η πιθανότητα ανακύκλωσης είναι

$$p = 2(1 - \Phi(1)) = 2(1 - 0.8413) = 0.3174.$$

Έστω Y η τ.μ. που αναπαριστά τον αριθμό των σωληνών από το δείγμα των 5 σωληνών που ανακυκλώνονται. Ισχύει ότι $Y \sim \Delta(n = 5, p = 0.3174)$. Τότε,

$$P(Y = 3) = \binom{5}{3} (0.3174)^3 (1 - 0.3174)^2 \cong 0.149.$$

β) Θα πρέπει

$$p = 2(1 - \Phi(\frac{0.1}{\sigma})) = 0.06 \Rightarrow \Phi(\frac{0.1}{\sigma}) = 0.97 \cong \Phi(1.88).$$

Άρα,

$$\frac{0.1}{\sigma} = 1.88 \Rightarrow \sigma = 0.053 \Rightarrow \sigma^2 = 0.002809.$$