

ΗΥ-217: Πιθανότητες-Χειμερινό Εξάμηνο 2020
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Φροντιστήριο 7

Άσκηση 1

Θεωρείστε τις δύο διακριτές τυχαίες μεταβλητές (τ.μ.) με από κοινού συνάρτηση πιθανότητας (σ.π.) όπως φαίνεται στον ακόλουθο πίνακα :

	$Y = 1$	$Y = 2$	$Y = 3$
$X = 1$	1/9	2/9	1/9
$X = 2$	0	1/9	2/9
$X = 3$	1/9	0	1/9

(α) Υπολογίστε την περιθωριακή σ.π. $p_X(x)$ της τ.μ. X . Υπολογίστε την μέση τιμή της X , $E[X]$.

(β) Υπολογίστε την περιθωριακή σ.π. $p_Y(y)$ της τ.μ. Y . Υπολογίστε την μέση τιμή της Y , $E[Y]$.

(γ) Υπολογίστε την δεσμευμένη σ.π. της τ.μ. Y , $p_{Y/A}(y)$, δεδομένου του γεγονότος $A = \{X \leq 2\}$. Ποια είναι η μέση τιμή, δεύτερη ροπή, και διασπορά της τ.μ. Y δεδομένου του A , δηλαδή ποια είναι τα $E[Y/A]$, $E[Y^2/A]$, και $var(Y/A)$, αντίστοιχα ;

(δ) Εστω η τ.μ. $Z = g(X, Y) = 3X + 2Y + 7$. Υπολογίστε τη μέση τιμή της τ.μ. Z .

(ε) Εστω η τ.μ. $\tilde{X}$ με την ίδια σ.π. όπως η τ.μ. X και η τ.μ. $\tilde{Y}$ με την ίδια σ.π. όπως η τ.μ. Y . Έστω ότι οι τ.μ. $\tilde{X}$ και $\tilde{Y}$ είναι ανεξάρτητες. Υπολογίστε την από κοινού σ.π. των $\tilde{X}$ και $\tilde{Y}$.

Λύση

(α)

$$p_X(x) = \sum_{y=1}^3 p_{X,Y}(x, y), \quad x = 1, 2, 3$$

Από τον πίνακα τιμών της $p_{X,Y}(x, y)$ προκύπτει εύκολα ότι :

$$p_X(x) = \begin{cases} 4/9, & x = 1 \\ 3/9, & x = 2 \\ 2/9, & x = 3 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Εύκολα προκύπτει ότι :

$$E[X] = \sum_{x=1}^3 x \cdot p_X(x) = 1 \cdot \frac{4}{9} + 2 \cdot \frac{3}{9} + 3 \cdot \frac{2}{9} = \frac{16}{9}$$

(β) Ομοίως,

$$p_Y(y) = \sum_{x=1}^3 p_{X,Y}(x, y), \quad y = 1, 2, 3$$

Από τον πίνακα τιμών της $p_{X,Y}(x,y)$ προκύπτει εύκολα ότι :

$$p_Y(y) = \begin{cases} 2/9, & y = 1 \\ 3/9, & y = 2 \\ 4/9, & y = 3 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Άρα μπορούμε να συμπεράνουμε πως :

$$E[Y] = \sum_{y=1}^3 y \cdot p_Y(y) = 1 \cdot \frac{2}{9} + 2 \cdot \frac{3}{9} + 3 \cdot \frac{4}{9} = \frac{20}{9}$$

(Υ) Έχουμε ότι :

$$P_{Y|A}(y) = \frac{P(Y=y, A)}{P(A)}$$

όπου,

$$\begin{aligned} P(A) &= P(X \leq 2) = \sum_{i=1}^2 p_X(x) \\ &= p_X(1) + p_X(2) \\ &= \frac{4}{9} + \frac{3}{9} \\ &= \frac{7}{9} \end{aligned}$$

Επίσης, ισχύει ότι :

- $\{Y = 1\} \cap \{X \leq 2\} = \{(1, 1), (2, 1)\}$. Άρα,
 $P(Y = 1, A) = p_{X,Y}(1, 1) + p_{X,Y}(2, 1) = \frac{1}{9} + 0 = \frac{1}{9}$
- $\{Y = 2\} \cap \{X \leq 2\} = \{(1, 2), (2, 2)\}$. Άρα,
 $P(Y = 2, A) = p_{X,Y}(1, 2) + p_{X,Y}(2, 2) = \frac{2}{9} + \frac{1}{9} = \frac{3}{9}$
- $\{Y = 3\} \cap \{X \leq 2\} = \{(1, 3), (2, 3)\}$. Άρα,
 $P(Y = 3, A) = p_{X,Y}(1, 3) + p_{X,Y}(2, 3) = \frac{1}{9} + \frac{2}{9} = \frac{3}{9}$

Άρα, θα είναι :

$$p_{Y|A}(y) = \begin{cases} 1/7, & y = 1 \\ 3/7, & y = 2 \\ 3/7, & y = 3 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Επίσης, ισχύει ότι :

$$E[Y|A] = \sum_{y=1}^3 y \cdot p_{Y|A}(y) = 1 \cdot \frac{1}{7} + 2 \cdot \frac{3}{7} + 3 \cdot \frac{3}{7} = \frac{16}{7}$$

$$E[Y^2|A] = \sum_{y=1}^3 y^2 \cdot p_{Y|A}(y) = 1^2 \cdot \frac{1}{7} + 2^2 \cdot \frac{3}{7} + 3^2 \cdot \frac{3}{7} = \frac{40}{7}$$

$$var(Y|A) = E[Y^2|A] - (E[Y|A])^2 = \frac{40}{7} - \left(\frac{16}{7}\right)^2 = \frac{24}{49} = 0.49$$

(δ) Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}
 E[Z] &= E[3 \cdot X + 2 \cdot Y + 7] \\
 &= 3 \cdot E[X] + 2 \cdot E[Y] + 7 \\
 &= 3 \cdot \frac{16}{9} + 2 \cdot \frac{20}{9} + 7 \\
 &= \frac{151}{9} \\
 &= 16.78
 \end{aligned}$$

(ε) Καθώς οι $\tilde{X}$ και $\tilde{Y}$ είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους, θα είναι:

$$p_{\tilde{X}, \tilde{Y}}(x, y) = p_{\tilde{X}}(x) \cdot p_{\tilde{Y}}(y), \quad x, y = 1, 2, 3.$$

όπου οι $p_{\tilde{X}}(x)$ και $p_{\tilde{Y}}(y)$ ακολουθούν τις εκφράσεις στα (α) και (β).

Οι τιμές της $p_{\tilde{X}, \tilde{Y}}(x, y)$ φαίνονται στον ακόλουθο πίνακα:

	$\tilde{Y}=1$	$\tilde{Y}=2$	$\tilde{Y}=3$
$\tilde{X}=1$	$\frac{8}{81}$	$\frac{12}{81}$	$\frac{16}{81}$
$\tilde{X}=2$	$\frac{6}{81}$	$\frac{9}{81}$	$\frac{12}{81}$
$\tilde{X}=3$	$\frac{4}{81}$	$\frac{6}{81}$	$\frac{8}{81}$

Άσκηση 2

Έχετε στα χέρια σας ένα δίκαιο 6-εδρο ζάρι και ένα δίκαιο κέρμα. Ρίχνετε πρώτα το ζάρι και έστω X ο αριθμός που έρχεται. Στη συνέχεια, ρίχνετε το κέρμα X φορές και έστω ότι εμφανίζονται Y κεφαλές.

- (α) Ποια είναι η δεσμευμένη συνάρτηση πιθανότητας $p_{Y/X}(y/x)$; Δώστε την πλήρη μαθηματική περιγραφή της.
- (β) Υπολογίστε την πιθανότητα $P(Y = 3 / X = 6)$.
- (γ) Ποια είναι η Συνάρτηση Πιθανότητας της τ.μ. X ;
- (δ) Υπολογίστε την από κοινού Σ.Π. $p_{X,Y}(x, y)$ των τ.μ. X και Y .
- (ε) Υπολογίστε την πιθανότητα του γεγονότος να εμφανιστούν μόνο κεφαλές, δηλαδή $P(X = Y)$.

Λύση

- (α) Δεδομένου ότι φέρνουμε $X = x$ στη ρίψη του 6-εδρου δίκαιου ζαριού, ρίχνουμε το κέρμα x φορές και το πλήθος Y των κεφαλών που εμφανίζονται ακολουθεί Διωνυμική κατανομή με παραμέτρους $n = x$ και $p = \frac{1}{2}$:

$$Y / \{X = x\} \sim \Delta(x, \frac{1}{2})$$

Συνεπώς,

$$P_{Y/X}(y/x) = \binom{x}{y} \left(\frac{1}{2}\right)^y \left(\frac{1}{2}\right)^{x-y} = \binom{x}{y} \left(\frac{1}{2}\right)^x; \quad 1 \leq x \leq 6, \quad 0 \leq y \leq x.$$

$$(β) \quad P(Y = 3 / X = 6) = P_{Y/X}(y = 3 / x = 6) = \binom{6}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{20}{64} = 0.3125.$$

(γ') Προφανώς, η X είναι διακριτή ομοιόμορφη τ.μ. στο πεδίο τιμών $x = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}, & x = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases}$$

(δ) Γνωρίζουμε ότι η δεσμευμένη Σ.Π. συχνά είναι χρήσιμη για τον υπολογισμό της από κοινού Σ.Π. μέσω του Πολλαπλασιαστικού νόμου:

$$\begin{aligned} p_{X,Y}(x, y) &= p_Y(y) \cdot p_{X/Y}(x/y) \\ &= p_X(x) \cdot p_{Y/X}(y/x) \end{aligned}$$

Συνεπώς, η από κοινού Σ.Π. των X και Y είναι:

$$\begin{aligned} p_{X,Y}(x, y) &= p_X(x) \cdot p_{Y|X}(y|x) \\ &= \frac{1}{6} \binom{x}{y} \left(\frac{1}{2}\right)^x; \quad 1 \leq x \leq 6, \quad 0 \leq y \leq x. \end{aligned}$$

(ε) Η πιθανότητα του γεγονότος να εμφανιστούν μόνο κεφαλές είναι

$$\begin{aligned} P(X = Y) &= \sum_{i=1}^6 p_{X,Y}(i, i) \quad (x = i, y = i) \\ &= \frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 \binom{i}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^i \\ &= \frac{1}{6} \left[\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^6 \right] = 0.164. \end{aligned}$$

Άσκηση 3

Ο Χρήστος αφιερώνει K ώρες στην αγορά βιβλίων, όπου K μια διακριτή τ.μ με ισοπίθανες τιμές 1, 2, 3 και 4. Ο αριθμός N των βιβλίων που αγοράζει ο Χρήστος είναι και αυτός μια διακριτή τ.μ που εξαρτάται από το πόση ώρα ψωνίζει. Άρα:

$$p_{N/K}(n/k) = \frac{1}{k}, \quad \text{για } n = 1, \dots, k.$$

(α) Υπολογίστε την από κοινού σ.π. των K και N .

(β) Υπολογίστε την περιθωριακή σ.π. της N .

(γ) Υπολογίστε τη δεσμευμένη σ.π. της K δεδομένου του γεγονότος $N = 2$.

(δ) Μας δίδεται ότι ο Χρήστος αγόρασε τουλάχιστον 2 αλλά όχι περισσότερα από 3 βιβλία. Υπολογίστε τη δεσμευμένη μέση τιμή και διασπορά της K , δεδομένης της παραπάνω πληροφορίας.

Λύση

(α) Χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι $p_{N,K}(n, k) = p_{N|K}(n|k)p_K(k)$ για να υπολογίσουμε την από κοινού σ.π.π.:

$$p_{N,K}(n, k) = \begin{cases} 1/(4k), & k = 1, 2, 3, 4 \text{ και } n = 1, \dots, k; \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

(β) Η σ.π.π $p_N(n)$ δίνεται από τον ακόλουθο τύπο:

$$p_N(n) = \sum_k p_{N,K}(n, k) = \sum_{k=n}^4 \frac{1}{4k}$$

δηλαδή:

$$p_N(n) = \begin{cases} 25/48, & n = 1 \\ 13/48, & n = 2 \\ 7/48, & n = 3 \\ 3/48, & n = 4 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

(γ) Η δεσμευμένη $\sigma.\pi.\pi$ είναι:

$$p_{K|N}(k|2) = \frac{p_{N,K}(2, k)}{p_N(2)} = \begin{cases} 6/13, & k = 2; \\ 4/13, & k = 3; \\ 3/13, & k = 4; \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

(δ) Έστω A το γεγονός ότι $2 \leq N \leq 3$. Πρώτα υπολογίζουμε την δεσμευμένη $\sigma.\pi.\pi$ του K δεδομένου του A :

$$p_{K|A}(k) = \frac{P(K = k, A)}{P(A)}$$

$$P(A) = p_N(2) + p_N(3) = 5/12$$

$$P(K = k, A) = \begin{cases} 1/8, & k = 2; \\ 1/12 + 1/12, & k = 3; \\ 1/16 + 1/16, & k = 4; \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

$$p_{K|A}(k) = \begin{cases} 3/10, & k = 2; \\ 2/5, & k = 3; \\ 3/10, & k = 4; \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Επειδή η δεσμευμένη $\sigma.\pi.\pi$ του K δεδομένου του A είναι συμμετρική γύρω από το $k = 3$, γνωρίζουμε ότι $E[K|A] = 3$. Μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε την δεσμευμένη διασπορά του K δεδομένου του A :

$$\text{var}(K|A) = E[(K - E[K|A])^2|A] = \frac{3}{10}(2 - 3)^2 + \frac{2}{5}(3 - 3)^2 + \frac{3}{10}(4 - 3)^2 = \frac{3}{5}$$

Άσκηση 4

Στα παρακάτω ερωτήματα επιλέξτε τη σωστή απάντηση και αιτιολογείστε την επιλογή σας:

(α) Έστω δύο διακριτές τ.μ. X και Y , όπου κάθε μία παίρνει τιμές $\{1, 2, 3\}$. Η από κοινού συνάρτηση πιθανότητας είναι $p_{X,Y}(x, y) = 0$, αν $(x, y) \in \{(1, 3), (2, 1), (3, 2)\}$ και $p_{X,Y}(x, y) > 0$, αν $(x, y) \in \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 3)\}$. Τότε:

- (i) Οι τ.μ. X και Y είναι ανεξάρτητες.
- (ii) Οι τ.μ. X και Y δεν είναι ανεξάρτητες.

(β) Έστω 4 ανεξάρτητες τ.μ. Bernoulli X_i , $i = 1, \dots, 4$, με παραμέτρο $p = 0.1$. Ορίζουμε την τ.μ. $X = \sum_{i=1}^4 X_i$. Τότε:

- (i) $E[X_1/X = 2] = 0.1$.
- (ii) $E[X_1/X = 2] = 0.5$.
- (iii) $E[X_1/X = 2] = 0.25$.

(γ) Οι ανεξάρτητες τ.μ. X και Y είναι Διωνυμικές με παραμέτρους $(n = 10, p)$ και $(n = 5, q)$, αντίστοιχα. Δηλαδή $X \sim \Delta(10, p)$ και $Y \sim \Delta(5, q)$. Η διασπορά της τ.μ. $Z = 3 + 2X + 5Y$ είναι:

- (i) $20p(1 - p) + 25q(1 - q)$.
- (ii) $9 + 40p(1 - p) + 125q(1 - q)$.
- (iii) $40p(1 - p) + 125q(1 - q)$.

Λύση

(α) Οι τ.μ. X και Y δεν είναι ανεξάρτητες. Π.χ. δεδομένου ότι $X = 1$, η Y δεν μπορεί ποτέ να πάρει την τιμή 3, καθώς $p_{Y/X}(3/1) = p_{X,Y}(1,3)/p_X(1) = 0/p_X(1) = 0$. Από την άλλη, $p_Y(3) = p_{X,Y}(2,3) + p_{X,Y}(3,3) > 0$. Άρα, $p_Y(3) \neq p_{Y/X}(3/1)$.

(β) Κατ' αρχάς, παρατηρούμε ότι η τ.μ. X είναι Διωνυμική ως άθροισμα τ.μ. Bernoulli, δηλαδή $X \sim \Delta(4, p)$. Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} P(X_1 = 1/X = 2) &= \frac{P(X_1 = 1 \cap X = 2)}{P(X = 2)} \\ &= \frac{p \cdot \binom{3}{1} \cdot p^1 \cdot (1-p)^{3-1}}{\binom{4}{2} \cdot p^2 \cdot (1-p)^{4-2}} = \frac{\binom{3}{1}}{\binom{4}{2}} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Συνεπώς, $P(X_1 = 0/X = 2) = 1 - P(X_1 = 1/X = 2) = \frac{1}{2}$.

Τελικά, $E[X_1/X = 2] = 1 \cdot P(X_1 = 1/X = 2) + 0 \cdot P(X_1 = 0/X = 2) = 0.5$

(γ) Αφού οι τ.μ. X και Y είναι ανεξάρτητες, η διασπορά του αθροίσματος ισούται με το άθροισμα των διασπορών:

$$\begin{aligned} var(Z) &= var(3 + 2X + 5Y) = var(2X) + var(5Y) \\ &= 4var(X) + 25var(Y) \\ &= 4 \cdot 10p(1-p) + 25 \cdot 5q(1-q) \\ &= 40p(1-p) + 125q(1-q) \end{aligned}$$