

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

HY-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2020
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Φροντιστήριο 6
Διακριτές Τυχαίες Μεταβλητές (II)

Άσκηση 1.

Ρίχνουμε ένα αμερόληπτο εξαέδρο ζάρι, και έστω Τ.Μ. X που αντιπροσωπεύει τον αριθμό που θα φέρει. Να υπολογιστούν:

- (α) Η μέση τιμή της X , $E[X]$
(β) Η διασπορά της X , $VAR[X]$

Λύση.

Εφ' όσον το ζάρι είναι αμερόληπτο, και τα 6 ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα με πιθανότητα εμφάνισης $\frac{1}{6}$.

- (α) Από τον τύπο ορισμού της μέσης τιμής, έχουμε:

$$E[X] = \sum_{x=1}^6 xp_X(x) = \sum_{x=1}^6 x \frac{1}{6} = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}.$$

- (β) Αντίστοιχα με πριν, έχουμε:

$$E[X^2] = \sum_{x=1}^6 x^2 p_X(x) = \sum_{x=1}^6 x^2 \frac{1}{6} = \frac{1+4+9+16+25+36}{6} = \frac{91}{6}.$$

Από γνωστές ιδιότητες υπολογισμού της διασποράς, έχουμε:

$$VAR[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{91}{6} - \frac{49}{4} = \frac{35}{12}.$$

Άσκηση 2.

Μία Τ.Μ. X παίρνει τις τιμές $\{0, 1, 2, \kappa\}$ με αντίστοιχες πιθανότητες $\{\frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{3}, a\}$.

- (α) Να υπολογιστεί η πιθανότητα a .
(β) Αν $E[X] = \frac{8}{3}$, να βρεθεί η τιμή k .
(γ) Με βάση τα ερωτήματα α)-β), να υπολογιστεί η διασπορά της X , $VAR[X]$.

Λύση.

- (α) Θα πρέπει να ισχύει η Συνθήκη Κανονικοποίησης:

$$\sum_x p_X(x) = 1 \Rightarrow \frac{1}{6} + \frac{1}{5} + \frac{1}{3} + a = 1 \Rightarrow \frac{5}{30} + \frac{6}{30} + \frac{10}{30} + a = 1 \Rightarrow \frac{21}{30} + a = 1 \Rightarrow a = 1 - \frac{21}{30} \Rightarrow$$
$$a = \frac{9}{30} \Rightarrow \boxed{a = \frac{3}{10}}$$

- (β) Δεδομένης της τιμής του a που προσδιορίσαμε στο α) ερώτημα, έχουμε:

$$E[X] = \frac{8}{3} \Rightarrow \sum_x xp_X(x) = \frac{8}{3} \Rightarrow 0 \times \frac{1}{6} + 1 \times \frac{1}{5} + 2 \times \frac{1}{3} + k \times \frac{3}{10} = \frac{8}{3} \Rightarrow \frac{1}{5} + \frac{2}{3} + k \times \frac{3}{10} = \frac{8}{3} \Rightarrow$$
$$k \times \frac{3}{10} = \frac{8}{3} - \frac{2}{3} - \frac{1}{5} \Rightarrow k \times \frac{3}{10} = 2 - \frac{1}{5} \Rightarrow k \times \frac{3}{10} = \frac{9}{5} \Rightarrow k = \frac{90}{15} \Rightarrow \boxed{k = 6}$$

- (γ) Αντίστοιχα με πριν, έχουμε:

$$E[X^2] = \sum_x x^2 p_X(x) = 0^2 \times \frac{1}{6} + 1^2 \times \frac{1}{5} + 2^2 \times \frac{1}{3} + 6^2 \times \frac{3}{10} = \frac{1}{5} + \frac{4}{3} + \frac{108}{10} = \frac{6}{30} + \frac{40}{30} + \frac{324}{30} = \frac{37}{3}.$$

Από γνωστές ιδιότητες υπολογισμού της διασποράς, έχουμε:

$$VAR[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{37}{3} - \frac{64}{9} = \frac{111}{9} - \frac{64}{9} = \frac{47}{9}.$$

Άσκηση 3.

Η θερμοκρασία μιας πόλης μοντελοποιείται ως μια τ.μ. με μέση τιμή και τυπική απόκλιση ίσες με 10 βαθμούς Κελσίου. Μια ημέρα χαρακτηρίζεται ως "τυπική", αν η θερμοκρασία κατά τη διάρκεια αυτής της ημέρας έχει εύρος/πεδίο τιμών μίας τυπικής απόκλισης από τη μέση τιμή. Ποιο θα ήταν το εύρος/πεδίο τιμών για μια τυπική μέρα, αν η θερμοκρασία εκφράζονταν σε βαθμούς Φαρενάιτ; (Βοήθεια: Η μετατροπή βαθμών από την κλίμακα Κελσίου στην κλίμακα Φαρενάιτ γίνεται με τη βοήθεια της σχέσης: $[C^\circ] \times \frac{9}{5} + 32 = [F^\circ]$).

Λύση.

Αν η τ.μ. X εκφράζει τη θερμοκρασία σε βαθμούς Κελσίου, τότε η θερμοκρασία σε Φαρενάιτ θα εκφράζεται από την $Y = 32 + \frac{9}{5}X$.

Άρα

$$E[Y] = 32 + \frac{9}{5}E[X] = 32 + 18 = 50.$$

Επίσης,

$$\begin{aligned} \text{var}(Y) &= \left(\frac{9}{5}\right)^2 \text{var}(X) = \left(\frac{9}{5}\right)^2 \sigma_X^2 = \left(\frac{9}{5}10\right)^2 \\ \Rightarrow \sigma_Y &= \sqrt{\text{var}(Y)} = \frac{9}{5}10 = 18 \end{aligned}$$

Συνεπώς μία τυπική ημέρα σε Φάρενάιτ είναι αυτή για την οποία η θερμοκρασία θα βρίσκεται στο πεδίο τιμών $[32, 68]$.

Άσκηση 4.

(α') Έστω X διωνυμική τυχαία μεταβλητή με παραμέτρους $(10, p)$. Να υπολογίσετε: (i) την πιθανότητα η X να πάρει την τιμή 2 και (ii) τη διασπορά της τ.μ. $2 + 3X$.

(β') Έστω Z "Poisson" τυχαία μεταβλητή. Αν $E[Z] = 3$, ποια είναι η μέση τιμή της τ.μ. $Y = (Z - 2)^2$.

Λύση.

$$(α, i) P(X = 2) = \binom{10}{2} p^2 (1-p)^8 = \frac{10!}{2!8!} p^2 (1-p)^8 = 45 p^2 (1-p)^8$$

$$(α, ii) \text{var}(3X + 2) = 3^2 \text{var}(X) = 9 * n * p * (1-p) = 9 * 10 * p * (1-p) = 90p(1-p)$$

(β) Για την Poisson δείξαμε ότι $E[Z] = \text{var}(Z) = \lambda = 3$.

$$\begin{aligned} E[Y] &= E[(Z - 2)^2] = E[Z^2 - 4Z + 4] = E[Z^2] - 4E[Z] + 4 \\ &= \text{var}(Z) + (E[Z])^2 - 4E[Z] + 4 \\ &= \lambda + \lambda^2 - 4\lambda + 4 = \lambda^2 - 3\lambda + 4 \\ &= 3^2 - 3 * 3 + 4 = 4 \end{aligned}$$

Άσκηση 5.

Η μέση ημερήσια θερμοκρασία στη Θεσσαλονίκη το μήνα Μάρτιο, μετρούμενη σε ακέραιους βαθμούς Κελσίου είναι μια τ.μ. X με την ακόλουθη Συνάρτηση Πιθανότητας:

$$p_X(k) = \begin{cases} \frac{1}{20} |k - 10|, & 10 - b \leq k \leq 10 + b \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

(α') Υπολογίστε τη σταθερά b και δώστε τη γραφική παράσταση της Σ.Π. της τ.μ. X

Βοήθεια: Παρατηρήστε τη συμμετρία της Σ.Π. της X και χρησιμοποιήστε την ταυτότητα $\sum_{i=1}^b i = \frac{b(b+1)}{2}$.

(β') Ποια είναι η αναμενόμενη τιμή, $E[X]$ και η διασπορά, $var(X)$ της X ;

Λύση.

(α') Για να είναι η $p_X(k)$ μια έγκυρη σ.π. πρέπει

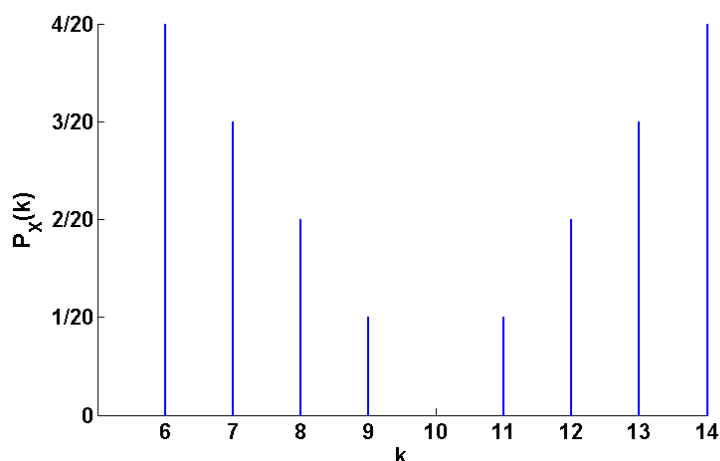
$$\sum_{k=10-b}^{10+b} p_X(k) = 1$$

Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} \sum_{k=10-b}^{10+b} \frac{1}{20} |k - 10| &= 2 \cdot \sum_{k=11}^{10+b} \frac{1}{20} (k - 10) && [\text{λόγω συμμετρίας της } p_X(k) \text{ γύρω από το } k = 10] \\ &= 2 \cdot \sum_{m=1}^b \frac{1}{20} m = \frac{1}{10} \sum_{m=1}^b m && [m = k - 10] \\ &= \frac{1}{10} \frac{b(b+1)}{2} = \frac{b(b+1)}{20} = 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow b = 4$$

Η γραφική παράσταση της $p_X(k)$ φαίνεται στο Σχήμα 1.



$$p_X(k) = \begin{cases} 0, & k = 10 \\ 1/20, & k = 9 \text{ ή } 11 \\ 2/20, & k = 8 \text{ ή } 12 \\ 3/20, & k = 7 \text{ ή } 13 \\ 4/20, & k = 6 \text{ ή } 14 \end{cases}$$

Σχήμα 1: Η γραφική παράσταση και η Σ.Π. για το υποερώτημα **3(α)**.

(β') Προφανώς λόγω συμμετρίας της $p_X(k)$ γύρω από το $k = 10$,

$$E[X] = 10.$$

Επίσης,

$$E[X^2] = \sum_k k^2 p_X(k) = 10^2 \cdot 0 + (9^2 + 11^2) \cdot \frac{1}{20} + (8^2 + 12^2) \cdot \frac{2}{20} + (7^2 + 13^2) \cdot \frac{3}{20} + (6^2 + 14^2) \cdot \frac{4}{20} = 110$$

$$\text{var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = 110 - 10^2 = 10$$

Άσκηση 6.

Έστω η τ.μ. X με πεδίο τιμών $\{1, 2\}$ και η τ.μ. Y με πεδίο τιμών $\{1, 2, 3\}$. Υποθέστε ότι η από κοινού Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας (ΣΠΠ) για τις τ.μ. (X, Y) δίδεται από τη σχέση $p(x, y) = c(x + y)$, όπου $x \in \{1, 2\}$, $y \in \{1, 2, 3\}$ και c είναι μία σταθερά.

(α') Βρείτε την τιμή της σταθεράς c .

(β') Βρείτε τις περιθωριακές συναρτήσεις πιθανότητας για τις τ.μ. X και Y , $p_X(x)$ $p_Y(y)$.

Λύση.

(α') Πρέπει να ισχύει:

$$\sum_{x=1}^2 \sum_{y=1}^3 p(x, y) = 1$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{x=1}^2 \sum_{y=1}^3 c(x + y) = c \left(\sum_{x=1}^2 \sum_{y=1}^3 x + \sum_{y=1}^3 \sum_{x=1}^2 y \right) \\ &= c \left(3 \sum_{x=1}^2 x + 2 \sum_{y=1}^3 y \right) = c(3 \cdot 3 + 2 \cdot 6) = 21c \end{aligned}$$

$$\text{Άρα, } c = \frac{1}{21}$$

(β')

$$\begin{aligned} p_X(x) &= \sum_{y=1}^3 p(x, y) = \frac{1}{21} \sum_{y=1}^3 (x + y) = \frac{3x + 6}{21}, \quad x = 1, 2 \\ p_Y(y) &= \sum_{x=1}^2 p(x, y) = \frac{1}{21} \sum_{x=1}^2 (x + y) = \frac{3 + 2y}{21}, \quad y = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

Άσκηση 7.

Γιατρεύοντας τον μανιώδη τζογαδόρο.

Οι αμερικάνικες ρουλέτες διαθέτουν 38 ισοπίθανα νούμερα. Αν έρθει το νούμερο στο οποίο έχει ποντάρει ένας παίκτης, αυτός παίρνει πίσω το αρχικό ποσό που πόνταρε και επίσης το πληρώνεται άλλες 35 φορές, διαφορετικά το χάνει.

Ο κύριος "Τάδε" πάντα ποντάρει 1€ στο νούμερο 13 της ρουλέτας. Για να βοηθήσει στη θεραπεία του μανιώδη τζογαδόρου μας, ο κ. "Καλόφιλος" πάντα στοιχηματίζει 20€ στον κ. Τάδε, ακόμα και στα χρήματα που ο κ. Τάδε θα χάνει μετά από 36 παιχνίδια. Ο στόχος μας είναι να διαπιστώσουμε πώς δουλεύει η θεραπεία.

- (α') Υπολογίστε το αναμενόμενο κέρδος του κ. Τάδε, μόνο για τα 36 παιχνίδια στη ρουλέτα, χωρίς το στοίχημα των 20€ του κ. Καλόφιλου. (Αν πρόκειται να χάνει χρήματα, το αναμενόμενο κέρδος θα είναι αρνητικός αριθμός.)
- (β') Υπολογίστε την πιθανότητα ότι ο κ. Τάδε θα χάνει χρήματα μετά από 36 παιχνίδια στη ρουλέτα. (Βοήθεια: Μπορεί να χάνει χρήματα αν έχει κερδίσει έστω ένα από τα 36 παιχνίδια ;)
- (γ') Υπολογίστε το αναμενόμενο κέρδος του κ. Τάδε από το στοίχημα του κ. Καλόφιλου.
- (δ') Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της γραμμικότητας για τη μέση τιμή, και τα αποτελέσματα των (α) και (γ), υπολογίστε το συνολικό αναμενόμενο κέρδος του κ. Τάδε από τη ρουλέτα και το στοίχημα. Πώς δουλεύει η θεραπεία ;

Λύση.

- (α') Έστω η τ.μ. X_i , η οποία εκφράζει το κέρδος του κ. Τάδε στο i -οστό παιχνίδι. Σε κάθε παιχνίδι, αν κερδίσει, που συμβαίνει με πιθανότητα $\frac{1}{38}$, $X_i = 35$, αλλιώς $X_i = -1$. Άρα η τ.μ. X_i έχει την παρακάτω ΣΠΠ:

$$p_{X_i}(x) = \begin{cases} \frac{1}{38}, & x = 35 \\ \frac{37}{38}, & x = -1 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Η μέση τιμή της X είναι:

$$E[X] = 35 \cdot \frac{1}{38} - 1 \cdot \frac{37}{38} = -\frac{2}{38}.$$

Το κέρδος X από τα πρώτα 36 παιχνίδια είναι το άθροισμα των κερδών από κάθε παιχνίδι, $X = \sum_{i=1}^{36} X_i$. Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της γραμμικότητας για τη μέση τιμή έχουμε:

$$\begin{aligned} E[X] &= E\left[\sum_{i=1}^{36} X_i\right] = \sum_{i=1}^{36} E[X_i] \\ &= 36 \cdot \left(-\frac{2}{38}\right) = -\frac{36}{19} \approx -1.8947. \end{aligned}$$

- (β') Αν ο κ. Τάδε κέρδιζε 1 φορά και έχανε 35 φορές στα 36 παιχνίδια, το κέρδος του θα ήταν $35 - 1 \cdot 35 = 0$, και δε θα έχανε χρήματα. Αν κέρδιζε περισσότερες από μία φορές, το κέρδος του θα ήταν (σύμφωνα με τα παραπάνω) θετικό. Έτσι ο μόνος τρόπος για να χάνει ο κ. Τάδε χρήματα μετά το 36ο παιχνίδι είναι να χάσει όλα τα παιχνίδια. Αφού τα παιχνίδια είναι μεταξύ τους ανεξάρτητα, η πιθανότητα να χαθούν όλα είναι:

$$p_{\text{χάνει}} = \left(\frac{37}{38}\right)^{36} \approx 0.38287.$$

(γ') Όταν καταλήγει να χάνει χρήματα που συμβαίνει με πιθανότητα $p_{\chi\acute{\alpha}\nu\epsilon\iota}$, χάνει 20€, αλλιώς κερδίζει 20€ από τον κ. Καλόφιλο. Αν η τ.μ. K εκφράζει το κέρδος του σε αυτό το ποντάρισμα, η ΣΠΠ της K είναι:

$$p_K(k) = \begin{cases} p_{\chi\acute{\alpha}\nu\epsilon\iota}, & k = -20 \\ 1 - p_{\chi\acute{\alpha}\nu\epsilon\iota}, & k = 20 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

και η αντίστοιχη μέση τιμή είναι:

$$\begin{aligned} E[K] &= -20p_{\chi\acute{\alpha}\nu\epsilon\iota} + 20(1 - p_{\chi\acute{\alpha}\nu\epsilon\iota}) \\ &\approx -20 \cdot 0.38287 + 20 \cdot (1 - 0.38287) \\ &= 4.6852. \end{aligned}$$

(δ') Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της γραμμικότητας έχουμε:

$$E[X + K] = E[X] + E[K] \approx -1.8947 + 4.6852 = 2.7905$$

και έτσι ο κ. Τάδε κερδίζει 2.79€ ανά 36 παιχνίδια. Δηλαδή τελικά βγάζει χρήματα από τη ρουλέτα! Από ότι φαίνεται ο κ. Καλόφιλος πρέπει να θεραπευτεί πρώτος...

Άσκηση 8.

Οι τ.μ. X και Y έχουν από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας που δίνεται από τον παρακάτω τύπο:

$$p_{XY}(x, y) = \begin{cases} \frac{cy}{x}, & x \in \{1, 4, 6\}, y \in \{1, 2, 3\} \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

- (α) Υπολογίστε την σταθερά c .
 (β) Υπολογίστε την πιθανότητα $P(2Y < X)$.
 (γ) Υπολογίστε την περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $p_X(x)$.
 (δ) Υπολογίστε τη μέση τιμή $E[X]$.
 (ε) Υπολογίστε τη διασπορά $VAR[X]$.

Λύση.

(α) Από την έκφραση της από κοινού συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας βλέπουμε ότι υπάρχουν 9 υποψήφια ζεύγη $\{x, y\}$ με μη-μηδενική τιμή της $p_{XY}(x, y)$. Τα εν λόγω ζεύγη είναι τα εξής: $(1, 1), (1, 2), (1, 3), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (6, 1), (6, 2), (6, 3)$. Η πιθανότητα ενός ζεύγους είναι ανάλογη του κλάσματος $\frac{y}{x}$ των συνεταγμένων του ζεύγους. Με βάση την ιδιότητα της κανονικοποίησης θα έχουμε:

$$\begin{aligned} \sum_x \sum_y p_{XY}(x, y) &= 1 \\ \Rightarrow c \times \frac{1}{1} + c \frac{2}{1} + c \frac{3}{1} + c \frac{1}{4} + c \frac{2}{4} + c \frac{3}{4} + c \frac{1}{6} + c \frac{2}{6} + c \frac{3}{6} &= 1 \Rightarrow c + 2c + 3c + \frac{6c}{4} + \frac{6c}{6} = 1 \\ \Rightarrow 7c + \frac{3c}{2} &= 1 \Rightarrow \frac{14c}{2} + \frac{3c}{2} = 1 \Rightarrow \frac{17c}{2} = 1 \Rightarrow \boxed{c = \frac{2}{17}} \end{aligned}$$

(β) Υπάρχουν 3 ζεύγη για τα οποία ισχύει η σχέση $2Y < X$, και πιο συγκεκριμένα τα: $(4, 1), (6, 1), (6, 2)$. Άρα, η ζητούμενη πιθανότητα θα είναι:

$$P(2Y < X) = P(\{4, 1\}) + P(\{6, 1\}) + P(\{6, 2\}) = \frac{2}{17}(\frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{2}{6}) = \frac{2}{17}(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}) = \frac{2}{17} \frac{3}{4} = \frac{3}{34}$$

(γ) Για να προσδιορίσουμε την περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας για την τ.μ. X αθροίζουμε ως προς όλα τα πιθανά y , και αντίστοιχα για να προσδιορίσουμε την περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας για την τ.μ. Y αθροίζουμε ως προς όλα τα πιθανά x . Στην προκειμένη περίπτωση, ο αριθμός των πιθανών ζευγών με μη-μηδενική τιμή της $p_{XY}(x, y)$ είναι αρκετά μικρός, με αποτέλεσμα να μπορούμε να υπολογίσουμε τις αριθμητικές τιμές των περιθωρίων συναρτήσεων πυκνότητας πιθανότητας κατευθείαν. Για παράδειγμα, έχουμε:

$$p_X(4) = P(\{4, 1\}) + P(\{4, 2\}) + P(\{4, 3\}) = \frac{2}{17}(\frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4}) = \frac{2}{17} \frac{6}{4} = \frac{6}{34} = \frac{3}{17}$$

Με βάση τα παραπάνω, η περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας θα είναι τελικά:

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{12}{17}, & x = 1 \\ \frac{3}{17}, & x = 4 \\ \frac{2}{17}, & x = 6 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

(δ) Χρησιμοποιώντας τον τύπο ορισμού της μέσης τιμής, έχουμε:

$$E[X] = \sum_{x=1,4,6} x p_X(x) = 1 \times \frac{12}{17} + 4 \times \frac{3}{17} + 6 \times \frac{2}{17} = \frac{12}{17} + \frac{12}{17} + \frac{12}{17} = \frac{16}{17}$$

(ε) Για τον υπολογισμό της διασποράς, θα κάνουμε χρήση του γνωστού τύπου από τη θεωρία:

$$VAR[X] = E[X^2] - (E[X])^2$$

Με βάση τα δεδομένα της άσκησης, έχουμε:

$$E[X^2] = \sum_{x=1,4,6} x^2 p_X(x) = 1^2 \times \frac{12}{17} + 4^2 \times \frac{3}{17} + 6^2 \times \frac{2}{17} = \frac{12}{17} + \frac{48}{17} + \frac{72}{17} = \frac{132}{17}$$