

HY-217: Πιθανότητες-Χειμερινό Εξάμηνο 2020-2021
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Φροντιστήριο 4

Άσκηση 1

Το δελτίο καιρού για μία τυχαία μέρα του έτους μπορεί να λέει: "ήλιος", "συννεφιά", "βροχή" ή "χιόνι". Υποθέτουμε ότι το έτος έχει 4 εποχές ("φθινόπωρο", "χειμώνας", "άνοιξη", "καλοκαίρι"), με 90 μέρες στην κάθε εποχή. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι χιόνι μπορεί να πέσει μόνο τον χειμώνα, καθώς επίσης και ότι δε βρέχει το καλοκαίρι. Πόσα ετήσια δελτία καιρού είναι δυνατά, (δηλαδή, ποιο είναι το πλήθος όλων των δυνατών ακολουθιών δελτίων καιρού 360 (= 4 · 90) ημερών);

Λύση

Την άνοιξη και το φθινόπωρο, κάθε μέρα έχει 3 πιθανές καταστάσεις για τον καιρό ("ήλιος", "συννεφιά", "βροχή"). Συνεπώς, για κάθε μία από αυτές τις εποχές το συνολικό πλήθος των πιθανών καταστάσεων είναι: $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 3 = 3^{90}$.

Ομοίως, υπάρχουν:

- 4^{90} πιθανές καταστάσεις για τον χειμώνα ("ήλιος", "συννεφιά", "βροχή", "χιόνι")
- 2^{90} πιθανές καταστάσεις για το καλοκαίρι ("ήλιος", "συννεφιά")

Άρα, τελικά, το συνολικό πλήθος των δυνατών ακολουθιών δελτίων καιρού για 360 μέρες είναι:

$$3^{90} \cdot 3^{90} \cdot 4^{90} \cdot 2^{90} \approx 10^{167}$$

Άσκηση 2

Πόσες δυνατές εκδοχές υπάρχουν στο καθένα από τα παρακάτω πειράματα;

- Εγκαθιστούμε ένα πρόγραμμα διαδοχικά σε 10 υπολογιστές.
- Επιλέγουμε με τη σειρά 3 από 12 αντικείμενα, χωρίς επανατοποθέτηση.
- Στρίβουμε ένα κέρμα 6 φορές.
- Επιλέγουμε 20 άτομα από 100 για μία δημοσκόπηση.
- Ρίχνουμε ένα ζάρι 7 φορές.
- Βάζουμε 13 ανθρώπους να κάτσουν σε μία σειρά.
- Μοιράζουμε με τη σειρά 8 φύλλα από μία συνηθισμένη τράπουλα 52 φύλλων.
- Ρίχνουμε ένα κέρμα 4 φορές και ένα ζάρι 2 φορές.

Λύση

Σε κάθε περίπτωση πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τον σωστό κανόνα αρίθμησης. Πιο συγκεκριμένα:

- Έχουμε 10 επιλογές για τον πρώτουπολογιστή, 9 για τον δεύτερο, κ.ο.κ. Το πλήθος των μεταθέσεων είναι: $10! = 3628800$.
- Το πλήθος των διατεταγμένων 3-άδων είναι:

$$\frac{12!}{(12-3)!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9!}{9!} = 1320.$$

(iii) Κάθε μία από τις 6 ρίψεις μπορεί να καταλήξει σε 2 αποτελέσματα, άρα το πλήθος των επαναληπτικών διατάξεων είναι: $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^6 = 32$.

(iv) Εφόσον δεν μας ενδιαφέρει η σειρά επιλογής, το πλήθος των συνδυασμών είναι:

$$\binom{100}{20} = \frac{100!}{20!(100-20)!} \simeq 5.359 \cdot 10^{20}.$$

(v) Κάθε ζαριά έχει 6 δυνατά αποτελέσματα. Συνεπώς, από την πολλαπλασιαστική αρχή έχουμε $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^7$ δυνατές επαναληπτικές διατάξεις.

(vi) Έχουμε 13 επιλογές για τον πρώτο που θα επιλέξουμε, 12 επιλογές για τον δεύτερο, κ.ο.κ. Συνεπώς, έχουμε συνολικά $13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot \dots \cdot 1 = 13! = 6,227,020,800$ μεταθέσεις.

(vii) Παρατηρήστε ότι τα φύλλα μοιράζονται με την σειρά, συνεπώς ψάχνουμε για διατεταγμένες 8-άδες. Έχουμε 52 επιλογές για το πρώτο χαρτί, 51 επιλογές για το δεύτερο χαρτί, κ.ο.κ. Συνεπώς, έχουμε $\frac{52!}{(52-8)!} = 30,342,338,208,000$ διαφορετικές 8-άδες.

(viii) Κάθε κέρμα έχει 2 δυνατά αποτελέσματα και κάθε ζάρι 6 δυνατά αποτελέσματα. Άρα, από την πολλαπλασιαστική αρχή έχουμε $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 6 = 576$ δυνατές εκδοχές.

Άσκηση 3

(i) Να υπολογιστεί το πλήθος των δυνατών αναγραμματισμών (και χωρίς νόημα) που μπορούν να γίνουν από τα γράμματα των παρακάτω λέξεων:

(α) ΚΡΙΜΑ

(β) ΚΑΛΗΜΕΡΑ

(γ) ΠΑΠΑΚΙ

(δ) ΑΓΓΑΡΕΙΑ

(ii) Η ομάδα σας παίζει στην έδρα της 9 διαδοχικά παιχνίδια με αντίπαλες ομάδες. Λόγω "νέας εποχής-εξυγίανσης" στο ελληνικό ποδόσφαιρο, έχει προαποφασιστεί να έχει 4 νίκες, 3 ισοπαλίες και 2 ήττες. Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει αυτό;

Λύση

(i) Ο τύπος για τους ανασυνδυασμούς n αντικειμένων εκ των οποίων υπάρχουν k_1 αντικείμενα τύπου 1, k_2 αντικείμενα τύπου 2, $\dots$, k_m αντικείμενα τύπου m είναι:

$$\frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot k_3! \cdot \dots \cdot k_m!}$$

Με βάση αυτόν τον τύπο, η λύση του προβλήματος έχει ως εξής:

(α) Με την λέξη ΚΡΙΜΑ μπορούμε να κάνουμε:

$$\frac{5!}{1! \cdot 1! \cdot \dots \cdot 1!} = 5! = 120$$

αναγραμματισμούς, αφού κανένα γράμμα δεν εμφανίζεται παραπάνω από 1 φορά.

(β) Με την λέξη ΚΑΛΗΜΕΡΑ μπορούμε να κάνουμε:

$$\frac{8!}{1! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!} = \frac{8!}{2!} = \frac{40320}{2} = 20160$$

αναγραμματισμούς, αφού το γράμμα "Α" εμφανίζεται 2 φορές, και τα υπόλοιπα γράμματα από 1 φορά.

(γ) Με την λέξη ΠΑΠΑΚΙ μπορούμε να κάνουμε:

$$\frac{6!}{2! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1!} = \frac{6!}{2! \cdot 2!} = \frac{720}{4} = 180$$

αναγραμματισμούς, αφού τα γράμματα "Π" και "Α" εμφανίζονται 2 φορές, και τα υπόλοιπα γράμματα από 1 φορά.

(δ) Με την λέξη ΑΓΓΑΡΕΙΑ μπορούμε να κάνουμε:

$$\frac{8!}{3! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!} = \frac{8!}{3! \cdot 2!} = \frac{40320}{12} = 3360$$

αναγραμματισμούς, αφού το γράμμα "Α" εμφανίζεται 3 φορές, το γράμμα "Γ" εμφανίζεται 2 φορές, και τα υπόλοιπα γράμματα από 1 φορά.

(ii) Εδώ απλά θέλουμε να μοιράσουμε 9 αντικείμενα (τα 9 παιχνίδια) σε τρεις κατηγορίες των τεσσάρων, τριών και δύο. Συνεπώς υπάρχουν:

$$\binom{9}{4, 3, 2} = \frac{9!}{4!3!2!} = 1260$$

διαφορετικοί τρόποι για να γίνει κάτι τέτοιο.

Παρατήρηση: Εναλλακτικά, αν δεν θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε έναν έτοιμο τύπο, σκεφτόμαστε ως εξής:

Η πρώτη νίκη μπορεί να εμφανιστεί σε οποιονδήποτε από 9 αγώνες, η δεύτερη σε οποιονδήποτε από 8, κ.ο.κ., και για τα 9 αποτελέσματα, λαμβάνοντας τελικά 9! δυνατά αποτελέσματα.

Παρατηρήστε ότι οι νίκες εμφανίζονται με 4! διαφορετικές σειρές, οι ισοπαλίες με 3! διαφορετικές σειρές, και οι ήττες με 2! διαφορετικές σειρές.

Για κάθε μία συγκεκριμένη ακολουθία αποτελεσμάτων όπου οι νίκες/ισοπαλίες/ήττες δεν είναι διακριτές, υπάρχουν 4! · 3! · 2! ακολουθίες όπου οι νίκες/ισοπαλίες/ήττες δεν είναι διακριτές.

Άρα, αν X είναι ο ζητούμενος αριθμός, θα πρέπει:

$$X \cdot 4! \cdot 3! \cdot 2! = 9! \Rightarrow X = \frac{9!}{4!3!2!} = 1260.$$

Άσκηση 4

Ένα άτομο έχει 8 φίλους, 5 από τους οποίους θέλει να καλέσει σε ένα πάρτι.

- (i) Πόσες επιλογές έχει, αν δύο από τους φίλους του έχουν μαλώσει και δεν γίνεται να προσκληθούν συγχρόνως;
- (ii) Πόσες επιλογές έχει αν δύο από τους φίλους του είναι ζευγάρι και πρέπει να προσκληθούν συγχρόνως;

Λύση

(i) Εδώ έχουμε 2 περιπτώσεις αν δύο άτομα δε γίνεται να προσκληθούν συγχρόνως:

- (α) Είτε δε θα προσκληθεί κανένας εκ τους δύο
- (β) Είτε θα προσκληθεί μόνο ένας εκ των δύο

Στη συνέχεια, το σύνολο χωρίζεται σε δύο υποσύνολα:

- Το ένα περιέχει τα 2 άτομα που έχουν μαλώσει
- Το άλλο περιέχει τα εναπομείναντα 6 από τα συνολικά 8 άτομα

Στην πρώτη περίπτωση, το άτομο δε θα καλέσει κανένα από τους δύο, διαλέγοντας 0 άτομα από το σύνολο των 2, και θα καλέσει και τα 5 άτομα από το σύνολο των 6.

Στη δεύτερη περίπτωση το άτομο θα καλέσει έναν εκ των δύο, διαλέγοντας 1 άτομο από το σύνολο των 2, και θα καλέσει τα υπόλοιπα 4 άτομα από το σύνολο των 6.

Οπότε, τελικά, το συνολικό πλήθος των επιλογών θα είναι:

$$C(2, 0) \cdot C(6, 5) + C(2, 1) \cdot C(6, 4) = \binom{2}{0} \cdot \binom{6}{5} + \binom{2}{1} \cdot \binom{6}{4} = \binom{6}{5} + 2 \cdot \binom{6}{4}$$

(ii) Εδώ έχουμε 2 περιπτώσεις αν δύο άτομα είναι ζευγάρι:

(α') Είτε δε θα προσκληθεί κανένας από τους δύο

(β') Είτε θα προσκληθούν και οι δύο

Στη συνέχεια, το σύνολο χωρίζεται σε δύο υποσύνολα:

- Το ένα περιέχει τα 2 άτομα που είναι ζευγάρι
- Το άλλο περιέχει τα εναπομείναντα 6 από τα συνολικά 8 άτομα

Στην πρώτη περίπτωση, το άτομο δε θα καλέσει κανένα από τους δύο, διαλέγοντας 0 άτομα από το σύνολο των 2, και θα καλέσει και τα 5 άτομα από το σύνολο των 6.

Στη δεύτερη περίπτωση το άτομο θα καλέσει και τους δύο, διαλέγοντας και τα 2 άτομα από το σύνολο των 2, και θα καλέσει τα υπόλοιπα 3 άτομα από το σύνολο των 6.

Οπότε, τελικά, το συνολικό πλήθος των επιλογών θα είναι:

$$C(2, 0) \cdot C(6, 5) + C(2, 2) \cdot C(6, 3) = \binom{2}{0} \cdot \binom{6}{5} + \binom{2}{2} \cdot \binom{6}{3} = \binom{6}{5} + 2 \cdot \binom{6}{3}$$

Άσκηση 5

Τραβάμε 7 χαρτιά από μια καλά ανακατεμένη τράπουλα 52 χαρτιών. Να υπολογιστούν οι πιθανότητες:

- Τα 7 χαρτιά να περιέχουν ακριβώς 3 άσσους
- Τα 7 χαρτιά να περιέχουν ακριβώς 2 βαλέδες
- Τα 7 χαρτιά να περιέχουν ακριβώς 3 άσσους ή 2 βαλέδες

Λύση

- Ορίζουμε το εξής ενδεχόμενο: $A = \{\text{Τα 7 χαρτιά περιέχουν ακριβώς 3 άσσους}\}$.

Συνολικά υπάρχουν $\binom{52}{7}$ δυνατοί τρόποι να τραβήξουμε 7 φύλλα από μια τράπουλα 52 φύλλων.

Ας μετρήσουμε πόσοι από τους συνδυασμούς αυτούς περιέχουν ακριβώς 3 άσσους.

Παρατήρηση: Το σκεπτικό είναι ότι χωρίζουμε το αρχικό σύνολο σε υποσύνολα, και μετράμε τους συνδυασμούς μέσα σε αυτά.

Πιο συγκεκριμένα, εδώ έχουμε ένα υποσύνολο που περιέχει τους 4 άσσους, και άλλο ένα που περιέχει τα υπόλοιπα 48 φύλλα τα οποία δεν είναι άσσοι, εκ των συνολικά 52 φύλλων.

Υπάρχουν λοιπόν δυνατοί τρόποι να τραβήξουμε 3 από τους 4 άσσους, και δυνατοί τρόποι να τραβήξουμε τα υπόλοιπα 4 φύλλα από τα 48 φύλλα της τράπουλας που έχουν απομείνει. Συνεπώς, υπάρχουν δυνατοί συνδυασμοί να τραβήξουμε 7 φύλλα που να περιέχουν ακριβώς 3 άσσους.

Για να βρούμε την πιθανότητα ότι στα 7 φύλλα περιέχονται 3 άσσοι, διαιρούμε αυτόν τον αριθμό με το συνολικό πλήθος των δυνατών συνδυασμών να διαλέξουμε 7 φύλλα από μια τράπουλα των 52 φύλλων, και τελικά έχουμε:

$$p_1 = \frac{\binom{4}{3} \cdot \binom{48}{4}}{\binom{52}{7}} = \frac{4 \cdot 194580}{133784560} = \frac{778320}{133784560} = 0.0058.$$

- (ii) Με ανάλογο συλλογισμό όπως παραπάνω, υπάρχουν $\binom{4}{2}$ δυνατοί τρόποι να τραβήξουμε 2 από τους 4 βαλέδες, και $\binom{48}{5}$ δυνατοί τρόποι να τραβήξουμε τα υπόλοιπα 5 φύλλα από τα 48 φύλλα της τράπουλας που έχουν απομείνει.

Συνεπώς, υπάρχουν $\binom{4}{2} \cdot \binom{48}{5}$ δυνατοί συνδυασμοί να τραβήξουμε 7 φύλλα, που να περιέχουν ακριβώς 2 βαλέδες.

Η πιθανότητα στα 7 φύλλα να περιέχονται 2 βαλέδες είναι τελικά:

$$p_2 = \frac{\binom{4}{2} \cdot \binom{48}{5}}{\binom{52}{7}} = \frac{6 \cdot 1712304}{133784560} = \frac{10273824}{133784560} = 0.0768.$$

- (iii) Ορίζουμε τα εξής ενδεχόμενα:

- $A = \{\text{Τραβήξαμε 7 φύλλα που περιέχουν ακριβώς 3 άσσους}\}$
- $B = \{\text{Τραβήξαμε 7 φύλλα που περιέχουν ακριβώς 2 βαλέδες}\}$

Η ζητούμενη πιθανότητα είναι η πιθανότητα της ένωσης των ενδεχομένων A, B :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Οι πιθανότητες $P(A)$ και $P(B)$ είναι γνωστές, από τα προηγούμενα ερωτήματα, άρα πρέπει να βρούμε την πιθανότητα $P(A \cap B)$.

Το ενδεχόμενο $(A \cap B)$ συμβαίνει με την επιλογή 3 από τους 4 άσσους, 2 από τους 4 βαλέδες, και 2 από τα υπόλοιπα 44 φύλλα.

Συνολικά λοιπόν, υπάρχουν $\binom{4}{3} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{44}{2}$ δυνατοί τρόποι για να επιλέξουμε 7 φύλλα που περιέχουν ακριβώς 3 άσσους και 2 βαλέδες. Άρα, η πιθανότητα $P(A \cap B)$ θα είναι:

$$P(A \cap B) = \frac{\binom{4}{3} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{44}{2}}{\binom{52}{7}} = \frac{4 \cdot 6 \cdot 946}{133784560} = \frac{22704}{133784560} = 1.6971 \cdot 10^{-4}$$

Τελικά, η ζητούμενη πιθανότητα θα είναι:

$$p_3 = p_1 + p_2 - P(A \cap B) = 0.0058 + 0.0768 - 1.6971 \cdot 10^{-4} = 0.0828.$$

Άσκηση 6

100 φοιτητές, συμπεριλαμβανομένων του Κώστα και της Ελένης, πρόκειται να χωριστούν σε 4 τάξεις ίδιου μεγέθους, και αυτό θα γίνει με τυχαίο τρόπο. Να υπολογιστεί η πιθανότητα ο Κώστας και η Ελένη να καταλήξουν στην ίδια τάξη.

Λύση

Εφόσον δεν μας ενδιαφέρει η σειρά, θα πρέπει κατευθείαν να σκεφτούμε ότι πρέπει να χρησιμοποιήσουμε συνδυασμούς για να βρούμε το ζητούμενο.

Έστω ότι έχουμε 4 τάξεις των 25 φοιτητών, τις Α, Β, Γ, Δ. Τότε, η πιθανότητα να βρίσκονται ο Κώστας και η Ελένη μαζί σε μία συγκεκριμένη τάξη θα είναι:

$$p_4 = \frac{\text{Πλήθος συνδυασμών που περιέχουν τον Κώστα και την Ελένη-π.χ. στην τάξη Α}}{\text{Συνολικό πλήθος συνδυασμών 100 φοιτητών σε 4 τάξεις των 25 φοιτητών}}$$

Παρατήρηση: Σε τέτοιου είδους ασκήσεις, αρχικά σκεφτόμαστε τις περιπτώσεις να πραγματοποιηθεί το ζητούμενο ενδεχόμενο, και στη συνέχεια χωρίζουμε το αρχικό σύνολο σε υποσύνολα, στα οποία μετράμε το πλήθος των συνδυασμών.

Εν προκειμένω, χωρίζουμε το αρχικό σύνολο σε ένα υποσύνολο που περιέχει τον Κώστα και την Ελένη, και σε ένα άλλο υποσύνολο που περιέχει τους υπόλοιπους 98 φοιτητές.

Για να συμπληρωθεί η τάξη των 25 φοιτητών, από το πρώτο σύνολο διαλέγουμε και τους 2, ενώ από δεύτερο υποσύνολο διαλέγουμε τους υπόλοιπους 23. Η πιθανότητα να συμβεί αυτό είναι:

$$\frac{\binom{2}{2} \cdot \binom{98}{23}}{\binom{100}{25}}$$

Καθώς υπάρχουν συνολικά 4 διαφορετικές τάξεις (Α, Β, Γ, Δ), η πιθανότητα να βρίσκονται ο Κώστας και η Ελένη μαζί σε κάποια από αυτές θα είναι:

$$p_5 = 4 \cdot \frac{\binom{2}{2} \cdot \binom{98}{23}}{\binom{100}{25}} = 4 \cdot \frac{1 \cdot 1.4698 \cdot 10^{22}}{2.4252 \cdot 10^{23}} = \frac{5.8793 \cdot 10^{22}}{2.4252 \cdot 10^{23}} = 0.2424.$$

Παρατήρηση: Εναλλακτικά, τοποθετούμε τον Κώστα σε μία συγκεκριμένη τάξη με πιθανότητα $\frac{1}{4}$ (όλες οι τάξεις θεωρούνται ισοπίθανες).

Για την Ελένη υπάρχουν 99 πιθανές τοποθετήσεις, από τις οποίες μόνο οι 24 την βάζουν στην ίδια τάξη με τον Κώστα.

Συνεπώς, η ζητούμενη πιθανότητα να (να μπουν μαζί σε οποιαδήποτε τάξη) θα είναι:

$$p_5 = 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{24}{99} = \frac{24}{99} = 0.2424.$$

Άσκηση 7

Η Αλίκη και ο Βασίλης παίζουν το ακόλουθο παιχνίδι: Πρώτα η Αλίκη επιλέγει τυχαία 4 από τα 52 φύλλα μίας τράπουλας, τα απομνημονεύει, και τα επανατοποθετεί πίσω στην τράπουλα. Ύστερα, ο Βασίλης επιλέγει τυχαία 8 φύλλα από την ίδια τράπουλα. Η Αλίκη κερδίζει αν στα φύλλα που επέλεξε ο Βασίλης βρίσκονται τα 4 δικά της. Να υπολογιστεί η πιθανότητα να κερδίσει η Αλίκη.

Λύση

Χωρίζουμε το αρχικό σύνολο σε ένα υποσύνολο που περιέχει τα 4 φύλλα της Αλίκης, και σε ένα άλλο που περιέχει τα υπόλοιπα 48 φύλλα της τράπουλας.

Για να κερδίσει η Αλίκη θα πρέπει ο Βασίλης να επιλέξει και τα 4 φύλλα από το πρώτο σύνολο.

Εφόσον τα 4 φύλλα της Αλίκης είναι συγκεκριμένα, ο Βασίλης πρέπει να διαλέξει επιπλέον 4 οποιαδήποτε φύλλα από το δεύτερο σύνολο. Συνεπώς, το συνολικό πλήθος των δυνατών συνδυασμών φύλλων του Βασίλη στους οποίους περιλαμβάνονται τα 4 φύλλα της Αλίκης είναι: $\binom{4}{4} \cdot \binom{48}{4}$.

Το συνολικό πλήθος των τρόπων με τους οποίους ο Βασίλης μπορεί να διαλέξει οποιαδήποτε 8 από τα συνολικά 52 φύλλα της τράπουλας είναι: $\binom{52}{8}$.

Άρα, η ζητούμενη πιθανότητα είναι τελικά:

$$p_6 = \frac{\binom{4}{4} \cdot \binom{48}{4}}{\binom{52}{8}} = \frac{1 \cdot 194580}{270725} = \frac{194580}{270725} = 0.7187$$

Άσκηση 8

Οι φοιτητές του Τμήματος Επιστήμης Υπολογιστών αγαπούν το μάθημα των Πιθανοτήτων (HY217), και επιθυμούν να αυξηθεί η διδακτέα ύλη του. Ωστόσο, κάποιοι καθηγητές του τμήματος αντιδρούν, υποστηρίζοντας ότι σε ένα τέτοιο ενδεχόμενο, οι φοιτητές θα αφιερώνουν περισσότερο χρόνο στο HY217, αμελώντας ταυτόχρονα τα υπόλοιπα μαθήματά τους. Ως εκ τούτου, φοιτητές και καθηγητές συμφωνούν να συσταθεί επιτροπή που θα εξετάσει το αίτημα των φοιτητών. Για το σκοπό αυτό θα λάβουν χώρα εκλογές όπου θα είναι υποψήφιοι 3 φοιτητές και 7 καθηγητές του τμήματος. Εκλέγονται τυχαία 3 άτομα για την επιτροπή.

- (i) Ποια είναι η πιθανότητα να εκλεγούν στην επιτροπή τουλάχιστον ένας φοιτητής και τουλάχιστον ένας καθηγητής;
- (ii) Ας υποθέσουμε τώρα πως, ανάλογα με τη σειρά εκλογής, αυτοί που εκλέγονται παίρνουν διαφορετικούς ρόλους στην επιτροπή (ο πρώτος γίνεται πρόεδρος, ο δεύτερος αντιπρόεδρος και ο τρίτος γραμματέας). Ποια είναι η πιθανότητα του ενδεχομένου A να εκλεγεί φοιτητής πρόεδρος και καθηγητές αντιπρόεδρος και γραμματέας;

Λύση

- (i) Έστω X το πλήθος των φοιτητών που επιλέχθηκαν, και Y το πλήθος των καθηγητών. Εφόσον δεν μας ενδιαφέρει η διάταξη των τριών ατόμων, υπολογίζουμε την ζητούμενη πιθανότητα ως εξής:

$$\begin{aligned} P(X \geq 1, Y \geq 1) &= P(\{X = 1, Y = 2\} \cup \{X = 2, Y = 1\}) \\ &= P(\{X = 1, Y = 2\}) + P(\{X = 2, Y = 1\}) \\ &= \frac{\binom{3}{1}\binom{7}{2}}{\binom{10}{3}} + \frac{\binom{3}{2}\binom{7}{1}}{\binom{10}{3}} = \frac{21}{40} + \frac{7}{40} = \frac{28}{40} = 0.7. \end{aligned}$$

Παρατήρηση: Στη δεύτερη ισότητα χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι τα ενδεχόμενα είναι ξένα μεταξύ τους.

- (ii) Εφόσον εδώ μας απασχολεί η σειρά με την οποία επιλέγονται τα "αντικείμενα" (δηλαδή, τα μέλη της επιτροπής), υπολογίζουμε αυτήν την πιθανότητα βάσει του νέου δειγματικού χώρου Ω ο οποίος περιέχει όλες τις διατεταγμένες 3-άδες, δηλαδή περιέχει:

$$|\Omega| = \frac{10!}{(10-3)!} = 720$$

στοιχεία.

Το πλήθος των 3-άδων που ανήκουν στο A είναι $3 \times 7 \times 6$, αφού έχουμε 3 επιλογές για τον φοιτητή που θα γίνει πρόεδρος, 7 επιλογές για τον καθηγητή που θα γίνει αντιπρόεδρος, και 6 επιλογές για τον καθηγητή που θα γίνει ταμίας (ανάμεσα στους 6 που μένουν). Άρα, η πιθανότητα του ενδεχομένου που μας ενδιαφέρει ισούται με:

$$P(A) = \frac{3 \cdot 7 \cdot 6}{720} = \frac{7}{40} \simeq 0.175$$

Άσκηση 9

Το κατάστημα της γειτονιάς σας πραγματοποιεί εκκαθάριση. Τα πάντα πρέπει να πωληθούν, νέα και παλιά. Το κατάστημα έχει 1000 παλιά κομμάτια και 1500 καινούρια. Το πρόβλημα είναι ότι 15% των παλιών είναι ελαττωματικά καθώς και 5% των νέων.

- (i) Ρίχνετε ένα δίκαιο κέρμα για να αποφασίσετε αν θα αγοράσετε παλιό ή νέο προϊόν. Διαλέγετε 2 κομμάτια του ίδιου τύπου (νέα ή παλιά) ανάλογα με το αποτέλεσμα μιας και μοναδικής ρίψης του κέρματος. Ποια η πιθανότητα ότι και τα 2 θα είναι ελαττωματικά;
- (ii) Δεδομένων των συνθηκών στο (i), και του ότι και τα 2 αντικείμενα είναι ελαττωματικά, ποια είναι η πιθανότητα ότι και τα 2 θα είναι παλιά κομμάτια;

Λύση

- (i) Ορίζουμε τα εξής ενδεχόμενα:

$A = \{\text{Τα επιλεγμένα κομμάτια είναι ελαττωματικά}\}$

$B_1 = \{\text{Επιλέγονται δύο παλιά κομμάτια}\}$

$B_2 = \{\text{Επιλέγονται δύο νέα κομμάτια}\}$

Τα ενδεχόμενα B_1 και B_2 είναι ξένα, και αποτελούν μια διαμέριση του Ω , το καθένα με θετική πιθανότητα. Συνεπώς, η ζητούμενη πιθανότητα, σύμφωνα με το Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας, ισούται με:

$$P(A) = P(B_1) \cdot P(A|B_1) + P(B_2) \cdot P(A|B_2)$$

Τα κομμάτια έχουν ίση πιθανότητα να είναι καινούρια ή παλιά, λόγω της επιλογής μέσω ρίψης δίκαιου κέρματος. Άρα, έχουμε:

$$P(B_1) = P(B_2) = \frac{1}{2}$$

Υπάρχουν $\binom{1000}{2}$ τρόποι, με ίση πιθανότητα, επιλογής 2 παλιών κομματιών από ένα σύνολο από 1000 παλιά κομμάτια. Εφόσον 15% των παλιών κομματιών είναι ελαττωματικά, υπάρχουν 150 ελαττωματικά παλιά κομμάτια.

Υπάρχουν $\binom{150}{2}$ τρόποι επιλογής 2 ελαττωματικών παλιών κομματιών από ένα σύνολο από 150 ελαττωματικά παλιά κομμάτια. Επομένως θα έχουμε:

$$P(A|B_1) = \frac{\binom{150}{2}}{\binom{1000}{2}}$$

Παρομοίως, ένα 5% από τα νέα κομμάτια (75) είναι ελαττωματικά. Δεδομένου ότι 2 νέα κομμάτια επιλέγονται θα έχουμε:

$$P(A|B_2) = \frac{\binom{75}{2}}{\binom{1500}{2}}$$

Άρα, τελικά, έχουμε:

$$P(A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\binom{150}{2}}{\binom{1000}{2}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\binom{75}{2}}{\binom{1500}{2}}$$

(ii) Ψάχνουμε την πιθανότητα: $P(B_1|A)$.

Παρατήρηση: Σε αντιστοιχία με τη θεωρία, η παρατήρηση/αποτέλεσμα είναι ότι τα αντικείμενα είναι ελαττωματικά, και η αιτία (για την οποία ψάχνουμε) είναι το κατά πόσον συμβάλλει στο αποτέλεσμα η παλαιότητα των κομματιών.

Χρησιμοποιώντας λοιπόν τον κανόνα του Bayes, έχουμε:

$$\begin{aligned} P(B_1|A) &= \frac{P(B_1) \cdot P(A|B_1)}{P(B_1) \cdot P(A|B_1) + P(B_2) \cdot P(A|B_2)} \\ &= \frac{1/2 \cdot \frac{\binom{150}{2}}{\binom{1000}{2}}}{1/2 \cdot \frac{\binom{150}{2}}{\binom{1000}{2}} + 1/2 \cdot \frac{\binom{75}{2}}{\binom{1500}{2}}} \end{aligned}$$