

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2020-2021
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Φροντιστήριο 3

Άσκηση 1

Ρίχνουμε 2 ζάρια. Βρείτε την πιθανότητα τουλάχιστον ένα να έφερε 6, αν είναι γνωστό ότι τα ζάρια έφεραν διαφορετικούς αριθμούς.

Λύση

Αν Ω είναι ο δειγματικός χώρος του πειράματος και ορίσουμε τα ενδεχόμενα

$$A = \{\text{τουλάχιστον ένα ζάρι έφερε 6}\} \text{ και } B = \{\text{τα ζάρια έφεραν διαφορετικούς αριθμούς}\},$$

τότε ψάχνουμε την πιθανότητα

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{10}{36}}{\frac{30}{36}} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3},$$

αφού

$$A \cap B = \{(1, 6), (2, 6), (3, 6), (4, 6), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5)\}$$

και

$$B = \Omega \setminus \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}.$$

Άσκηση 2

Ένα κουτί περιέχει 3 κάρτες: μια μπλε και από τις δύο πλευρές, μια κίτρινη και από τις δύο πλευρές και μια που είναι από τη μια πλευρά μπλε και από την άλλη πλευρά κίτρινη. Επιλέγουμε τυχαία μια κάρτα και βλέπουμε ότι η μια της πλευρά είναι κίτρινη. Ποια είναι η πιθανότητα να είναι και η άλλη πλευρά κίτρινη;

Λύση

Έστω τα ενδεχόμενα:

$$M = \{\text{επιλέγουμε την κάρτα που είναι μπλε και από τις δυο πλευρές}\}$$

$$K = \{\text{επιλέγουμε την κάρτα που είναι κίτρινη και από τις δυο πλευρές}\}$$

$$H = \{\text{επιλέγουμε την κάρτα που είναι από τη μια πλευρά μπλε και από την άλλη πλευρά κίτρινη}\}$$

$$A = \{\text{η επιλεγμένη πλευρά είναι κίτρινη}\}$$

Ψάχνω την πιθανότητα $P(K | A)$. Εφαρμόζοντας τον κανόνα του Bayes έχουμε:

$$\begin{aligned} P(K | A) &= \frac{P(A | K) \cdot P(K)}{P(A | M) \cdot P(M) + P(A | K) \cdot P(K) + P(A | H) \cdot P(H)} \\ &= \frac{1 \cdot \frac{1}{3}}{0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Άσκηση 3

Τα άτομα του πληθυσμού μιας χώρας έχουν ομάδα αίματος B με πιθανότητα $\frac{1}{4}$. Αν δυο άτομα είναι αδέρφια και το ένα έχει ομάδα αίματος B, η πιθανότητα να ισχύει το ίδιο και για το άλλο είναι $\frac{3}{4}$. Όταν κάποια άτομα δεν έχουν καμιά συγγένεια, τα ενδεχόμενα που αφορούν τις ομάδες αίματός τους είναι ανεξάρτητα. Θεωρούμε τα άτομα A_1, A_2, A_3, A_4 , όπου τα A_1, A_2 είναι αδέρφια, ενώ δεν υπάρχει καμιά άλλη συγγένεια ανάμεσα σε αυτά τα άτομα. Βρείτε την πιθανότητα ακριβώς 3 από αυτά τα άτομα να έχουν ομάδα αίματος B.

Λύση

Έστω τα ενδεχόμενα:

$$A_i = \{\text{ο } A_i \text{ έχει ομάδα αίματος B}\}, \text{ για } i = 1, 2, 3, 4 \text{ και} \\ B = \{\text{ακριβώς 3 άτομα έχουν ομάδα αίματος B}\}$$

Έχουμε:

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4^c) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3^c \cap A_4) + P(A_1 \cap A_2^c \cap A_3 \cap A_4) + P(A_1^c \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) \\ &= P(A_1 \cap A_2) \cdot P(A_3) \cdot P(A_4^c) + P(A_1 \cap A_2) \cdot P(A_3^c) \cdot P(A_4) \\ &\quad + P(A_1 \cap A_2^c) \cdot P(A_3) \cdot P(A_4) + P(A_1^c \cap A_2) \cdot P(A_3) \cdot P(A_4) \\ &= \frac{3}{16} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} + \frac{3}{16} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \approx 0.07 \end{aligned}$$

αφού τα $A_1 \cap A_2, A_3, A_4$ είναι ανεξάρτητα και

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2 | A_1) = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{16},$$

$$P(A_1 \cap A_2^c) = P(A_1) \cdot P(A_2^c | A_1) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16},$$

$$P(A_1^c \cap A_2) = P(A_2) \cdot P(A_1^c | A_2) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}.$$

Άσκηση 4

Αν ισχύει ότι $P(A | B) = P(A | B^c)$, αποδείξτε ότι τα A, B είναι ανεξάρτητα.

Λύση

Θέλουμε να δείξουμε ότι $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Έχουμε:

$$\begin{aligned} P(A | B) = P(A | B^c) &\Leftrightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A \cap B^c)}{P(B^c)} \\ &\Leftrightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{1 - P(B)} \\ &\Leftrightarrow P(A \cap B) - P(B) \cdot P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) - P(B) \cdot P(A \cap B) \\ &\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \end{aligned}$$

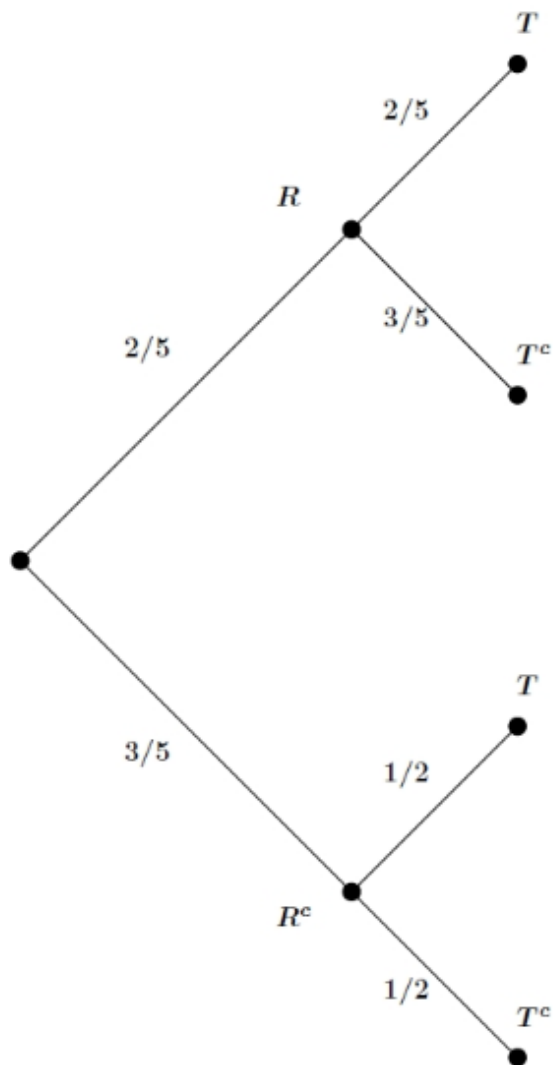
Άσκηση 5

Η πιθανότητα ο Γρηγόρης να πάει για τρέξιμο πριν τη δουλειά είναι $2/5$. Αν πάει για τρέξιμο, η πιθανότητα να προλάβει το τρένο για τη δουλειά είναι $2/5$. Αν δεν πάει για τρέξιμο, η πιθανότητα να προλάβει το τρένο είναι $1/2$. Αν δεν προλάβει το τρένο τότε παίρνει το λεωφορείο. Αυτό γίνεται από Δευτέρα έως Παρασκευή.

- (α) Σχεδιάστε ένα δέντρο ώστε να δείξετε τις πιθανότητες που περιγράφουν το πρωινό του Γρηγόρη.
 (β) Ποια είναι η πιθανότητα να προλάβει το τρένο ο Γρηγόρης ένα τυχαίο πρωί;
 (γ) Γνωρίζετε ότι ο Γρηγόρης πρόλαβε το τρένο. Ποια η πιθανότητα να πήγε για τρέξιμο;

Λύση

- (α) Έστω R το γεγονός ότι ο Γρηγόρης πάει για τρέξιμο, και T το γεγονός ότι προλαβαίνει το τρένο. Το δέντρο φαίνεται στο Σχήμα 1.



Σχήμα 1: Δέντρο πιθανοτήτων για το πρωινό του Γρηγόρη

(β) Χρησιμοποιώντας το νόμο της ολικής πιθανότητας, έχουμε:

$$\begin{aligned} P(T) &= P(T | R) \cdot P(R) + P(T | R^c) \cdot P(R^c) \\ &= \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} \\ &= 0.46 \end{aligned}$$

(γ) Χρησιμοποιούμε το νόμο του Bayes και έχουμε:

$$P(R | T) = \frac{P(T | R) \cdot P(R)}{P(T)} = 0.3478$$

Άσκηση 6

Μοιράζονται 4 νομίσματα σε 4 παιδιά (ανά ένα στο καθένα). Τα τρία από τα νομίσματα είναι κανονικά. Το ένα έχει και στις δύο πλευρές κορώνα. Ένα από τα παιδιά ρίχνει το νόμισμά του 3 φορές και φέρνει και στις τρεις κορώνα. Βρείτε την πιθανότητα το νόμισμά του να είναι αυτό με τις δύο κορώνες.

Λύση

Ορίζουμε τα ενδεχόμενα $A = \{\text{το νόμισμα έφερε 3 φορές κορώνα}\}$ και $K = \{\text{το νόμισμα έχει 2 πλευρές κορώνα}\}$. Άρα $K^c = \{\text{το νόμισμα είναι κανονικό}\}$.

Ζητείται η πιθανότητα

$$\begin{aligned} P(K | A) &= \frac{P(A \cap K)}{P(A)} = \frac{P(A | K) \cdot P(K)}{P(K) \cdot P(A | K) + P(K^c) \cdot P(A | K^c)} = \\ &= \frac{1 \cdot \frac{1}{4}}{\frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{8}} = \frac{8}{11} \end{aligned}$$

Άσκηση 7

Τα ενδεχόμενα A, B είναι ανεξάρτητα. Το ίδιο ισχύει για τα ενδεχόμενα A, C . Τα B, C είναι ασυμβίβαστα. Αποδείξτε ότι τα ενδεχόμενα $A, B \cup C$ είναι ανεξάρτητα.

Λύση

Αφού τα A, B είναι ανεξάρτητα, θα ισχύει ότι $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Ομοίως για τα A, C θα ισχύει ότι $P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C)$.

Αφού τα B, C είναι ασυμβίβαστα, θα ισχύει ότι $B \cap C = \emptyset$, άρα $P(B \cup C) = P(B) + P(C)$.

Έχουμε

$$\begin{aligned} P(A \cap (B \cup C)) &= P((A \cap B) \cup (A \cap C)) = P(A \cap B) + P(A \cap C) - P((A \cap B) \cap (A \cap C)) = \\ &= P(A) \cdot P(B) + P(A) \cdot P(C) = P(A) \cdot (P(B) + P(C)) = P(A) \cdot P(B \cup C) \end{aligned}$$

αφού $(A \cap B) \cap (A \cap C) = A \cap B \cap C = \emptyset$.

Άρα τα $A, B \cup C$ είναι ανεξάρτητα.