ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

**ΗΥ-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2020-2021**
**Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης**

Φροντιστήριο 2

## Συνοπτική Θεωρία

- Δεσμευμένη πιθανότητα

  – $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}, \;\; P(B) \neq 0$

  – $P(A_1 \cup A_2|B) = P(A_1|B) - P(A_1 \cap A_2|B)$

  – $P(A^c|B) = 1 - P(A|B)$

- Πολλαπλασιαστικός Νόμος

  – $P(A \cap B) = P(B)P(A|B),$

  – $P(\cap_{i=1}^{n} A_i = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \dots P(A_n| \cap_{i=1}^{n-1} A_i)$

- Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας Αν $A_1, ..., A_n$ ξένα γεγονότα που αποτελουν διαμέριση του $\Omega$, τότε για κάθε γεγονός Β ισχύει:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i \cap B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i)$$

- Κανόνας του $Bayes$ Αν $A_1, ..., A_n$ μια διαμέριση του $\Omega$, τότε για κάθε γεγονός Β με $P(B) > 0$ ισχύει:

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{P(B)} = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(A_k)P(B|A_k)}$$
$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i \cap B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i)$$

- Ανεξαρτησία και υπο συνθήκη ανεξαρτησία Δύο γεγονότα λέγονται ανεξάρτητα αν ισχύει οτι:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

  Δεδομένου γεγονότος $C$, τα Α, Β, είναι ανεξάρτητα όταν:

$$P(A \cap B|C) = P(A|C)P(B|C)$$

### Άσκηση 1

Η Αλίκη και ο Βασίλης θέλουν να αγοράσουν από ένα ποδήλατο. Το κατάστημα διαθέτει 4 πράσινα, 3 κίτρινα και 2 κόκκινα ποδήλατα. Η Αλίκη επιλέγει τυχαία ένα ποδήλατο και το αγοράζει. Αμέσως μετά το ίδιο κάνει και ο Βασίλης. Έστω Α το γεγονός ότι η Αλίκη αγόρασε ένα πράσινο ποδήλατο και Β το γεγονός ότι ο Βασίλης αγόρασε ένα πράσινο ποδήλατο.

(α) Υπολογίστε τις πιθανότητες $P(A)$, $P(B/A)$ και $P(B)$.

(β) Είναι τα γεγονότα Α και Β ανεξάρτητα; Αιτιολογείστε την απάντησή σας.

(γ) Ποια είναι η πιθανότητα ότι τουλάχιστον ένας από τους δύο αγόρασε πράσινο ποδήλατο;

(δ) Ποια είναι η πιθανότητα ότι η Αλίκη και ο Βασίλης αγόρασαν ποδήλατα με διαφορετικό χρώμα;

### Λύση

**(α)** $P(A) = \frac{4}{9}$ (Υπάρχουν 4 πράσινα ποδήλατα στα 9 συνολικά.)

$P(B/A) = \frac{3}{8}$ (Αφού γνωρίζουμε ότι η Αλίκη έχει πράσινο ποδήλατο, ο Βασίλης επέλεξε κάποιο από τα 3 επαναπομείναντα πράσινα από τα 8 συνολικά).

Εφαρμόζοντας τώρα το Θ.Ο.Π., έχουμε ότι:

$$P(B) = P(A) \cdot P(B/A) + P(A^c) \cdot P(B/A^c) = \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} + \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} = \frac{4}{9}.$$

**(β)** $P(B) = \frac{4}{9} \neq \frac{3}{8} = P(B/A)$, δηλαδή τα Α και Β δεν είναι ανεξάρτητα.

**(γ)** $P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(A\cap B) = P(A)+P(B)-P(B/A)P(A) = \frac{4}{9}+\frac{4}{9}-\frac{3}{8}\cdot\frac{4}{9} = \frac{13}{18} = 0.722$

**(δ)** Ας υπολογίσουμε πρώτα την πιθανότητα του γεγονότος να αγοράσουν ποδήλατα ίδιου χρώματος:

$P(\textit{πράσινο, πράσινο}) = \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8}$

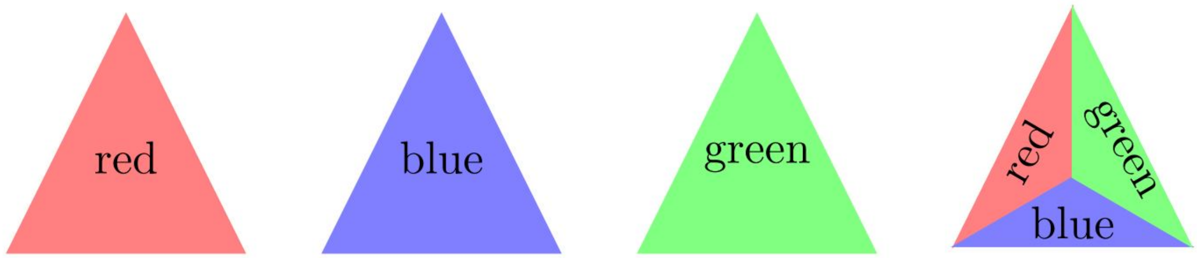
$P(\textit{κίτρινο, κίτρινο}) = \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8}$

$P(\textit{κόκκινο,κόκκινο}) = \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{8}$

Συνεπώς, $P(\textit{αγόρασαν ποδήλατα με διαφορετικό χρώμα}) = 1 - (\frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} + \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} + \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{8}) = \frac{13}{18} = 0.722$

**Άσκηση 2**

Ένα τετράεδρο έχει τις 4 πλευρές του βαμμένες όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Μια είναι βαμμένη όλη κόκκινη, μια είναι μπλέ, μια πράσινη και μια βαμένη κόκκινη, μπλέ και πράσινη.




Ρίχνουμε το τετράεδρο και η πιθανότητα μια οποιαδήποτε πλευρά του να ακουμπάει στο πάτωμα είναι ίση με $\frac{1}{4}$. Ορίζουμε τα εξής γεγονότα:

$$\begin{aligned} R &= \{\text{Η πλευρά που ακουμπάει στο πάτωμα περιέχει το κόκκινο χρώμα}\} \\ B &= \{\text{Η πλευρά που ακουμπάει στο πάτωμα περιέχει το μπλέ χρώμα}\} \\ G &= \{\text{Η πλευρά που ακουμπάει στο πάτωμα περιέχει το πράσινο χρώμα}\} \end{aligned}$$

(α) Υπολογίστε τις πιθανότητες των γεγονότων $R$, $B$, και $G$.

(β) Είναι τα γεγονότα $R$, $B$, και $G$ ανα δύο ανεξάρτητα;

(γ) Είναι τα γεγονότα $R$, $B$, και $G$ ανεξάρτητα;

**Λύση**

(α) Προφανώς, $P(R) = P(B) = P(G) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ καθώς 2 στις 4 πλευρές του τετράεδρου περιέχουν κόκκινο, μπλέ ή πράσινο χρώμα.

(β) $P(R \cap G) = P(G \cap B) = P(B \cap R) = \frac{1}{4}$ καθώς μόνο η τέταρτη πλευρά περιέχει ταυτόχρονα 2 χρώματα.
Έχουμε λοιπόν:

$$\begin{aligned} P(R \cap G) &= \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(R) \cdot P(G) \\ P(G \cap B) &= \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(G) \cdot P(B) \\ P(B \cap R) &= \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(B) \cdot P(R) \end{aligned}$$

άρα τα γεγονότα $R$, $B$, $G$ είναι ανεξάρτητα ανά δύο.

(γ) $P(R \cap B \cap G) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2} = P(R) \cdot P(B) \cdot P(G)$. Επομένως τα γεγονότα $R$, $B$, $G$ δεν είναι ανεξάρτητα.

**Άσκηση 3** Μία εξωμήτρια κύηση έχει διπλάσια πιθανότητα να συμβεί εάν η έγκυος γυναίκα είναι καπνίστρια απ΄ ότι εάν δεν είναι καπνίστρια. Αν το 32% των γυναικών σε ηλικία αναπαραγωγής είναι καπνίστριες, ποιο ποσοστό των γυναικών που παρουσιάζουν εξωμήτρια κύηση είναι καπνίστριες;

**Λύση**

Έστω $E$ το γεγονός ότι μια τυχαία επιλεγμένη έγκυος γυναίκα έχει εξωμήτρια κύηση και $S$ το γεγονός ότι μία τυχαία επιλεγμένη γυναίκα είναι καπνίστρια. Τότε, από τα δεδομένα του προβλήματος έχουμε ότι:

$$P(E|S) = 2P(E|S^c), \text{ και } P(S) = 0.32.$$

Ο κανόνας του Bayes μας δίνει:

$$\begin{aligned} P(S|E) &= P(S \cap E)/P(E) \\ &= \frac{P(E|S)P(S)}{P(E|S)P(S) + P(E|S^c)P(S^c)} \\ &= \frac{2P(S)}{2P(S) + P(S^c)} = 32/66 = 0.4848. \end{aligned}$$

**Άσκηση 4**
Όταν στέλνονται κωδικοποιημένα μηνύματα, πολλές φορές υπάρχουν απώλειες/σφάλματα κατα την μετάδοσή τους. Για παράδειγμα, ο κώδικας Μόρς χρησιμοποιεί τελείες και πάυλες, τα οποία εμφανίζονται με αναλογία 3:4. Αυτό, σημαίνει ότι για κάθε δοσμένο σύμβολο:

$$P(T_\tau) = \frac{3}{7} \text{ και } P(T_\pi) = \frac{4}{7}$$

Ας υποθέσουμε ότι στη γραμμή μετάδοσης υπάρχουν παρεμβολές/θόρυβος και με πιθανότητα $\frac{1}{8}$ μια τελεία μπορει να μεταδοθεί ως παύλα και αντίστροφα. Ποια η πιθανότητα το λαμβανόμενα σήμα να είναι το ίδιο με αυτό που εστάλη, α) αν το λαμβανόμενο σήμα είναι τελεία και β) αν το λαμβανόμενο σήμα είναι παύλα;

**Λύση**
Ορίζω τα ενδεχόμενα:
$T_\tau = \{\text{στέλνουμε τελεία}\}$ $R_\tau = \{\text{λαμβάνουμε τελεία}\}$
$T_\pi = \{\text{στέλνουμε παύλα}\}$ $R_\pi = \{\text{λαμβάνουμε παύλα}\}$
$P(R_\pi|T_\tau) = 1/8$, $P(R_\tau|T_\pi) = 1/8$, $P(T_\tau) = 3/7$, $P(T_\pi) = 4/7$

Έχουμε δύο περιπτώσεις:

1. Αν το λαμβανόμενο σήμα είναι τελεία έχουμε:

$$R(T_\tau|R_\tau) = \frac{P(R_\tau|T_\tau)P(T_\tau)}{P(R_\tau|T_\tau)P(T_\tau) + P(R_\tau|T_\pi)P(T_\pi)} = \frac{\frac{7}{8}\cdot\frac{3}{7}}{\frac{7}{8}\cdot\frac{3}{7} + \frac{1}{8}\cdot\frac{5}{7}} = \frac{21}{26}$$

2. Αν το λαμβανόμενο σήμα είναι παύλα έχουμε:

$$R(T_\pi|R_\pi) = \frac{P(R_\pi|T_\pi)P(T_\pi)}{P(R_\pi|T_\pi)P(T_\pi) + P(R_\pi|T_\tau)P(T_\tau)} = \frac{\frac{7}{8}\cdot\frac{4}{7}}{\frac{7}{8}\cdot\frac{4}{7} + \frac{1}{8}\cdot\frac{3}{7}} = \frac{28}{31}$$

## Άσκηση 5

Μια φιλή Βεδουίνων ψάχνουν να βρούν νερό στην έρημο. Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιούν το σοφό της φυλής, ο οποίος με την εμπειρία του και το μαγικό ραβδί του μπορεί να εντοπίζει το νερό με πιθανότητα 0.93, δηλαδή αν υπάρχει νερό σε ένα σημείο θα το βρει με πιθανότητα 93%. Επίσης, ο σοφός κάνει λάθος και λέει ότι βρήκε νερό όταν δεν υπάρχει νερό στο 12% των περιπτώσεων. Έστω η εκ των προτέρων (α πριορι) πιθανότητα ύπαρξης νερού σε οποιοδήποτε σημείο στην έρημο είναι 0.05.

α) Αν κάποια στιγμή ο σοφός φωνάξει «βρήκα νερό», ποιά η πιθανότητα πραγματικά να υπάρχει νερο;

β) Αν φωνάξει «δεν υπάρχει νερό εδώ», ποιά η πιθανότητα πραγματικά να μην υπάρχει νερό;

### Λύση

Έστω A το ενδεχόμενο υπάρχει νερό και N το ενδεχόμενο εγώ ο σοφός βρήκα νερό. Ισχύουν:

$$P(N|A) = 0.93,\ P(N|A^c) = 0.12,\ P(A) = 0.05$$

$$P(A|N) = \frac{P(A)P(N|A)}{P(N)} = \frac{0.05 \cdot 0.93}{P(N)},\ \text{όπου}$$

$$P(N) = P(A)P(N|A) + P(A^c)P(N|A^c) = 0.05 \cdot\ 0.93 + 0.95 \cdot 0.12 = 0.1605$$

$$P(A^c|N^c) = \frac{P(A^c)P(N^c|A^c)}{P(N^c)} = \frac{(1-P(A))(1-P(N|A^c))}{(1-P(N))} = \frac{(1-0.05)(1-0.12)}{(1-0.1605)} = 0.996$$

## Άσκηση 6

Το 80% των φοιτητών πηγαίνει απροετοίμαστο στις εξετάσεις. Από τους απροετοίμαστους φοιτητές περνάει το 15%, ενώ από τους προετοιμασμένους φοιτητές περνάει το 90%.

α) Να βρεθεί το ποσοστό των φοιτητών που περνά τις εξετάσεις.

β) Αν ένας φοιτητής πέρασε τις εξετάσεις, ποιά η πιθανότητα να ήταν προετοιμασμένος;

γ) Αν ένας φοιτητής δεν πέρασε τις εξετάσεις, ποιά η πιθανότητα να ήταν προετοιμασμένος;

### Λύση

Ορίζω τα ενδεχόμενα:
A={απροετοίμαστος} με $P(A) = 0.8$
$\hat{A}$={προετοίμασμένος} με $P(\hat{A}) = 1 - 0.8 = 0.2$
Π={πέρασε στις εξετάσεις} με $P(\Pi|A) = 0.15$ και $P(\Pi|\hat{A}) = 0.9$

α) $$P(\Pi) = P(\Pi|A)P(A) + P(\Pi|\hat{A})P(\hat{A}) = 0.15 \cdot 0.8 + 0.9 \cdot 0.2 = 0.3$$

β) $$P(\hat{A}|\Pi) = \frac{P(\Pi|\hat{A})P(\hat{A})}{P(\Pi)} = \frac{0.9 \cdot 0.2}{0.3} = 0.6$$

γ) $$P(\hat{A}|\hat{\Pi}) = \frac{P(\hat{\Pi}|\hat{A})P(\hat{A})}{P(\hat{\Pi})} = \frac{(1-P(\Pi|\hat{A}))P(\hat{A})}{1-P(\Pi)} = \frac{(1-0.9) \cdot 0.2}{0.7} = 0.028$$

## Άσκηση 7

(α) Πετάμε ένα νόμισμα στον αέρα και γυρίζουμε ένα εξάπλευρο ζάρι. Ποιά η πιθανότητα το κέρμα να έχει κεφαλή και το ζάρι να φέρει 3;

(β) Διαλέγουμε τυχαία ένα φύλλο από μια τράπουλα 52 φύλλων. Μετά το ξαναβάζουμε στη θέση του και τραβάμε άλλο ένα φύλλο. Ποιά η πιθανότητα να διαλέξαμε έναν βαλέ και μετά έναν άσσο;

### Λύση

(α) $P(\text{κεφαλή}) = \frac{1}{2}$, $P(3) = \frac{1}{6} \Rightarrow \;\; P(\text{κεφαλή και } 3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} \,=\, \frac{1}{12}$

(β) $P(\text{άσσος}) = \frac{4}{52}$, $P(\text{βαλές}) = \frac{4}{52} \Rightarrow \;\; P(\text{βαλές και άσσος}) = \frac{4}{52} \cdot \frac{4}{52} \,=\, \frac{16}{2704} \,=\, \frac{1}{169}$

## Άσκηση 8

Έστω $C_1, C_2, ..., C_n$ Μια διαμέριση ενός δειγματοχώρου $\Omega$ και A, B δύο γεγονότα για τα οποία ισχύουν τα εξής:

- Τα A, B είναι ανεξάρτητα υπό συνθήκη δεδομένου του $C_i$ για κάθε $i \in \{1, 2, ..., n\}$.
- Το B είναι ανεξάρτητο από όλα τα $C_i$.

Να αποδειχθεί ότι τα A και B είναι ανεξάρτητα.

### Λύση

Γνωρίζουμε ότι για να είναι δύο γεγονότα ανεξάρτητα πρέπει να ισχύει ότι:

$$P(A \cap B) \,=\, P(A)P(B)$$

Κάνοντας λοιπόν χρήση του θεωρήματος ολικής πιθανότητας για την τομή των A, B:

$$P(A \cap B) \,=\, \sum_{i=1}^{N} P(A \cap B|C_i)P(C_i) \qquad \textbf{(1)}$$

Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι τα A, B, είναι ανεξάρτητα για δεδομένο $C_i$ η (1) γίνεται:

$$P(A \cap B) \,=\, \sum_{i=1}^{N} P(A|C_i)P(B|C_i)P(C_i) \qquad \textbf{(2)}$$

Χρησιμοποιώντας και το άλλο γεγονός που λέει ότι το B είναι ανεξάρτητο από τα $C_i$, η (2) γίνεται:

$$P(A \cap B) \,=\, \sum_{i=1}^{N} P(A|C_i)P(B)P(C_i) \,=\, P(B)\sum_{i=1}^{N} P(A|C_i)P(C_i) \qquad \textbf{(3)}$$

Τέλος, εφαρμόζοντας το θεώρημα ολικής πιθανότητας στη σχέση (3), αυτή τη φορά για το ενδεχόμενο A, καταλήγουμε τελικά στο ότι:

$$P(A \cap B) \,=\, P(A)P(B)$$

Οπότε τελικά αποδείξαμε αυτό που θέλαμε αρχικά.