ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

**ΗΥ-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2020-2021**
**Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης**

Φροντιστήριο 1

### Άσκηση 1

Αν $A, B, C$ είναι τρία ενδεχόμενα, γράψτε τα σύνολα που περιγράφουν τα παρακάτω ενδεχόμενα:

α) Τουλάχιστον ένα από τα $A, B, C$ συμβαίνει.

β) Δεν συμβαίνει κανένα από τα $A, B, C$.

γ) Συμβαίνει το πολύ ένα από τα $A, B, C$.

δ) Συμβαίνει ακριβώς ένα από τα $A, B, C$.

ε) Συμβαίνουν τουλάχιστον δύο από τα $A, B, C$.

στ) Συμβαίνουν το πολύ δύο από τα $A, B, C$.

ζ) Και τα τρία γεγονότα $A, B, C$ συμβαίνουν.

η) Τα γεγονότα $A$ και $B$ συμβαίνουν, αλλά όχι το $C$.

ϑ) Μόνο το $A$ συμβαίνει.

ι) Ακριβώς δύο από τα $A, B, C$ συμβαίνουν.

κ) Το πολύ τρία γεγονότα συμβαίνουν.

### Λύση

α) $A \cup B \cup C$

β) $(A \cup B \cup C)^c = A^c \cap B^c \cap C^c$

γ) $(A \cap B^c \cap C^c) \cup (A^c \cap B \cap C^c) \cup (A^c \cap B^c \cap C) \cup (A^c \cap B^c \cap C^c)$, δηλαδή ή ϑα συμβεί μόνο το $A$, ή μόνο το $B$, ή μόνο το $C$, ή κανένα από τα $A, B, C$.

δ) $(A \cap B^c \cap C^c) \cup (A^c \cap B \cap C^c) \cup (A^c \cap B^c \cap C)$

ε) $(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$

στ) Θέλουμε να συμβαίνουν το πολύ δύο από τα $A, B, C$, δηλαδή να μη συμβαίνουν και τα 3 ενδεχόμενα μαζί. Άρα το ενδεχόμενο αυτό είναι το σύνολο $(A \cap B \cap C)^c$.

ζ) $A \cap B \cap C$

η) $A \cap B \cap C^c$

ϑ) $A \cap B^c \cap C^c$

ι) $(A \cap B \cap C^c) \cup (A \cap B^c \cap C) \cup (A^c \cap B \cap C)$

κ) $\Omega$

**Άσκηση 2**

Ρίχνουμε δύο φορές ένα δίκαιο εξάεδρο ζάρι.

α) Περιγράψτε το δειγματικό χώρο του πειράματος.

β) Ονομάζουμε $A$ το γεγονός ότι η πρώτη ρίψη φέρνει αριθμό μικρότερο από 3. Περιγράψτε το γεγονός $A$ και υπολογίστε την πιθανότητά του, $P(A)$.

γ) Ονομάζουμε $B$ το γεγονός ότι το άθροισμα των δύο ρίψεων είναι ίσο με 4. Περιγράψτε το γεγονός $B$ και υπολογίστε την πιθανότητά του, $P(B)$.

δ) Ποιο είναι το ενδεχόμενο $A \cap B$;

**Λύση**

α) Μπορούμε να αναπαραστήσουμε κάθε απλό ενδεχόμενο χρησιμοποιώντας ένα διατεταγμένο ζεύγος $(a, b)$ όπου $a$ και $b$ είναι οι αριθμοί που αντιπροσωπεύουν τα αποτελέσματα της 1ης και της 2ης ρίψης αντίστοιχα. Έτσι ο δειγματικός χώρος του πειράματος εκφράζεται ως

$$\Omega = \big\{(1,1),(1,2),(1,3),...,(2,1),(2,2),...,(6,6)\big\}$$

ή πιο απλά και αναλυτικά

$$\Omega = \big\{(a,b) : a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}, 1 \le a \le 6, 1 \le b \le 6\big\}$$

β) Αντίστοιχα το γεγονός $A = \big\{$ Η 1η ρίψη φέρνει αριθμό μικρότερο από 3$\big\}$ περιγράφεται ως

$$A = \big\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6)\big\}$$

ή

$$A = \big\{(a,b) : a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}, 1 \le a \le 2, 1 \le b \le 6\big\}$$

Αφού τα ζάρια είναι δίκαια, όλα τα απλά ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα άρα

$$P(A) = \tfrac{|A|}{|\Omega|} = \tfrac{12}{36} = \tfrac{1}{3}$$

γ) Το γεγονός $B = \big\{$ Το άθροισμα των 2 ρίψεων είναι ίσο με 4$\big\}$ περιγράφεται ως

$$B = \big\{(1,3),(2,2),(3,1)\big\}$$

Η αντίστοιχη πιθανότητα είναι

$$P(B) = \tfrac{|B|}{|\Omega|} = \tfrac{3}{36} = \tfrac{1}{12}$$

δ) $A \cap B = \{(1,3),(2,2)\}$.

**Άσκηση 3**
Έστω $A$ και $B$ τα ενδεχόμενα ένας εργαζόμενος στις $7:30$ π.μ να βρίσκεται στη στάση για να μεταβεί στη δουλειά του και περιμένει να περάσει λεωφορείο ή ταξί, αντίστοιχα. Αν $P(A) = 0.45$, $P(B) = 0.30$, οι πιθανότητες των παραπάνω ενδεχομένων, να υπολογισθεί η πιθανότητα στις $7:30$ π.μ να μην περάσει ούτε ταξί, ούτε λεωφορείο από τη στάση.

**Λύση**
Ζητείται να υπολογίσουμε την πιθανότητα του ενδεχομένου: $A^c \cap B^c$. Παρατηρούμε ότι: $A \cap B = \varnothing$
Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} P(A^c \cap B^c) &= P((A \cup B)^c) = 1 - P(A \cup B) \\ &= 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)] \\ &= 1 - (0.45 + 0.30) \\ &= 1 - 0.75 \\ &= 0.25 \end{aligned}$$

**Άσκηση 4**
Αν $A, B$ είναι ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου $\Omega$ για τα οποία ισχύει: $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = 2 \cdot x$ και $P(A \cup B) = 4 \cdot x^2 + \frac{3}{4}$, να βρεθεί ο $x > 0$.

**Λύση**
Ξέρω ότι

$$P(A \cup B) \leq P(A) + P(B).$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} &4 \cdot x^2 + \frac{3}{4} \leq \frac{1}{2} + 2 \cdot x \\ &16 \cdot x^2 + 3 \leq 2 + 8 \cdot x \\ &16 \cdot x^2 - 8 \cdot x + 1 \leq 0 \end{aligned}$$

$\Delta = 64 - 4 \cdot 16 \cdot 1 = 64 - 64 = 0$, άρα $x_{1,2} = \frac{8}{2 \cdot 16} = \frac{1}{4}$ και $16 \cdot x^2 - 8 \cdot x + 1 \geq 0$.
Άρα αναγκαστικά $16 \cdot x^2 - 8 \cdot x + 1 = 0$ και $x = \frac{1}{4}$.
(Μάλιστα παρατηρώ ότι τα $A$ και $B$ είναι ασυμβίβαστα αφού $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.)

**Άσκηση 5**
Σε μια έρευνα συγκεντρώθηκαν στοιχεία για 1000 άτομα. Βρέθηκε ότι από αυτά:

α) 832 ήταν άνδρες

β) 521 ήταν παντρεμένοι

γ) 350 ήταν παντρεμένοι άνδρες

Είναι δυνατόν αυτά τα στοιχεία να είναι σωστά;

**Λύση**
Αν $A = \{\text{άνδρας}\}$ και $\Pi = \{\text{παντρεμένος}\}$, τότε σύμφωνα με τα παραπάνω στοιχεία έχουμε

$$P(A) = \frac{832}{1000}, P(\Pi) = \frac{521}{1000} \text{ και } P(A \cap \Pi) = \frac{350}{1000}.$$

Άρα έχουμε

$$P(A \cup \Pi) = P(A) + P(\Pi) - P(A \cap \Pi) = \frac{832}{1000} + \frac{521}{1000} - \frac{350}{1000} = \frac{1003}{1000} = 1.003 > 1,$$

το οποίο είναι αδύνατο. Επομένως δεν είναι δυνατόν τα παραπάνω στοιχεία να είναι σωστά.

**Άσκηση 6**
Ο εκφωνητής του δελτίου καιρού δίνει τις ακόλουθες πιθανότητες για τον καιρό τις επόμενες δύο μέρες:

α) βροχή σήμερα: 0.3

β) βροχή αύριο: 0.5

γ) βροχή και σήμερα και αύριο: 0.2

δ) βροχή σήμερα ή αύριο: 0.7

Είναι αυτό το δελτίο καιρού συμβατό με τα Αξιώματα των Πιθανοτήτων;

**Λύση**
Ορίζουμε τα ενδεχόμενα $A = \{\text{θα βρέξει σήμερα}\}$ και $B = \{\text{θα βρέξει αύριο}\}$.
Άρα, σύμφωνα με τα δεδομένα της εκφώνησης έχουμε $P(A) = 0.3$, $P(B) = 0.5$, $P(A \cap B) = 0.2$ και $P(A \cup B) = 0.7$.
Πρέπει

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.3 + 0.5 - 0.2 = 0.6 \neq 0.7 = P(A \cup B).$$

Άρα αυτό το δελτίο καιρού δεν είναι συμβατό με τα αξιώματα των πιθανοτήτων.