

HY-217: Πιθανότητες-Χειμερινό Εξάμηνο 2020
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Φροντιστήριο 11

Άσκηση 1

Θεωρούμε την Τ.Μ. X η οποία είναι ομοιόμορφα κατανομημένη μεταξύ των τιμών 1 και 2, δηλαδή: $X \sim U[1,2]$. Ορίζουμε μια νέα τυχαία μεταβλητή ως εξής: $Y = e^{-2X}$.

- (i) Να γίνει η γραφική παράσταση της Συνάρτησης Πυκνότητας Πιθανότητας της Τ.Μ X , $f_X(x)$, καθώς και αυτή του μετασχηματισμού $Y = e^{-2X}$.
- (ii) Να υπολογιστεί η Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής της Τ.Μ. Y , $F_Y(y)$, και να γίνει η γραφική της παράσταση.
- (iii) Να υπολογιστεί η Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας της Τ.Μ. Y , $f_Y(y)$, και να γίνει η γραφική της παράσταση.
- (iv) Να υπολογιστεί η πιθανότητα $P(Y \leq e^{-3})$.

Λύση

- (i) Από την θεωρία γνωρίζουμε ως όταν η συνεχής Τ.Μ. X ακολουθεί Ομοιόμορφη Κατανομή στο διάστημα $[a, b]$, η Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας (ΣΠΠ) (PDF) αυτής θα δίνεται από τον παρακάτω τύπο:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

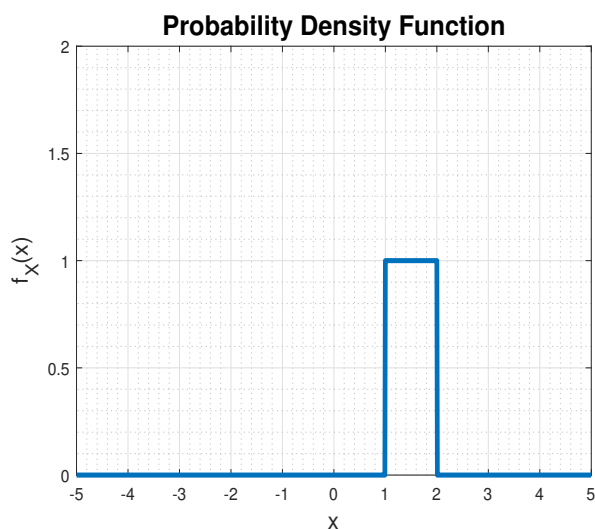
Με βάση την εκφώνηση της Άσκησης, προκύπτει ότι:

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$$

Άρα, η Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας (ΣΠΠ) (PDF) θα είναι τελικά:

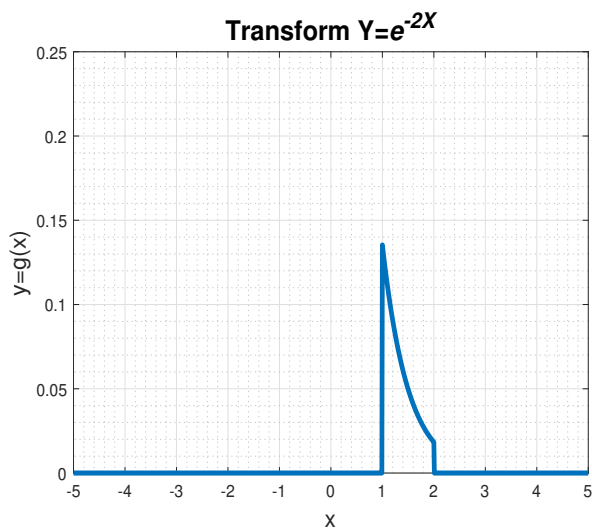
$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Η γραφική παράσταση της Συνάρτησης Πυκνότητας Πιθανότητας της X , $f_X(x)$, φαίνεται στο Σχήμα 1 (περιορισμένη στο διάστημα $[-5, 5]$).



Σχήμα 1: Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας $f_X(x)$.

Η γραφική παράσταση του μετασχηματισμού $Y = g(X)$ φαίνεται στο Σχήμα 2 (περιορισμένη στο διάστημα $[-5, 5]$).



Σχήμα 2: Μετασχηματισμός $Y = g(X)$.

(ii) Από το Σχήμα 2 βλέπουμε ότι η Τ.Μ Y παίρνει τιμές στο διάστημα $[e^{-4}, e^{-2}] = [0.019448, 0.13534]$. Άρα, θεωρούμε τις εξής περιπτώσεις:

(a) Για $y < e^{-4}$, έχουμε:

$$F_Y(y) = 0$$

(b) Για $e^{-4} \leq y < e^{-2}$, έχουμε:

$$F_Y(y) = P(Y < y) = P(e^{-2X} < y) = P(-2X < \ln y) = P(X > -\frac{1}{2} \ln y) = \int_{-\frac{1}{2} \ln y}^{+\infty} 1 dx = \int_{-\frac{1}{2} \ln y}^2 1 dx = [x]_{-\frac{1}{2} \ln y}^2 = 2 + \frac{1}{2} \ln y$$

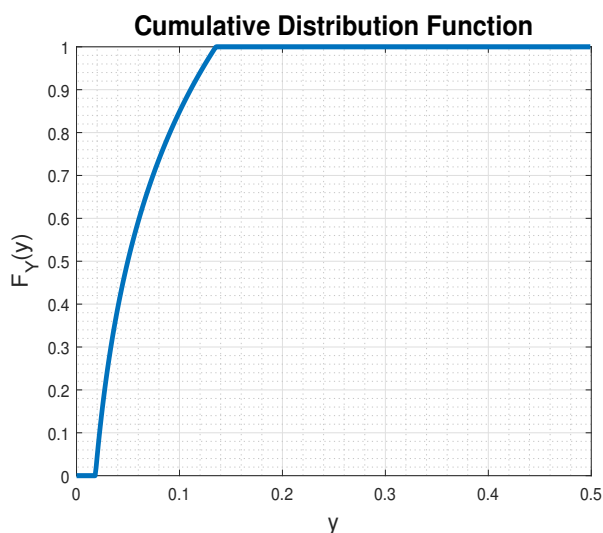
(c) Για $y \geq e^{-2}$, έχουμε :

$$F_Y(y) = 1$$

Άρα, η Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής της Τ.Μ. Y , $F_Y(y)$, θα είναι τελικά :

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y < e^{-4} \\ 2 + \frac{1}{2} \ln y & e^{-4} \leq y < e^{-2} \\ 1 & y \geq e^{-2} \end{cases}$$

Σχεδιάζοντας κάθε κλάδο της $F_Y(y)$ στα αντίστοιχα διαστήματα, λαμβάνουμε την γραφική παράσταση (περιορισμένη στο διάστημα $[0, 0.5]$) που φαίνεται στο Σχήμα 3.



Σχήμα 3: Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής $F_Y(y)$.

(iii) Με γνωστή την Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής, η Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας δίνεται από τον εξής τύπο :

$$f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy}$$

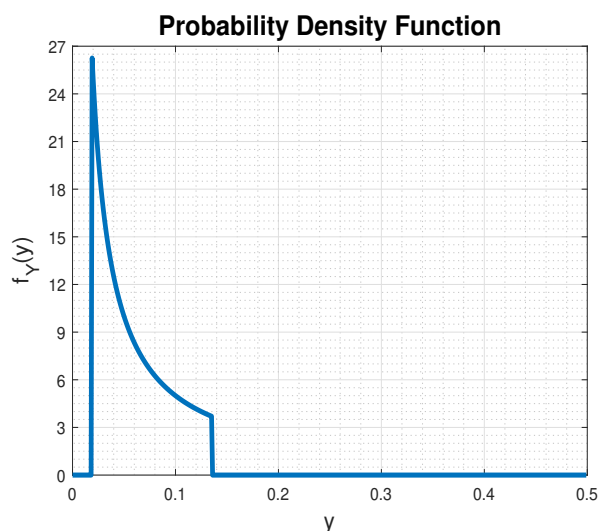
Με βάση την δοσμένη Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής, έχουμε :

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2y} & e^{-4} \leq y < e^{-2} \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Σχεδιάζοντας κάθε κλάδο της $f_Y(y)$ στα αντίστοιχα διαστήματα, λαμβάνουμε την γραφική παράσταση (περιορισμένη στο διάστημα $[0, 0.5]$) που φαίνεται στο Σχήμα 4.

(iv) Για τον υπολογισμό της ζητούμενης πιθανότητας, έχουμε :

$$P(Y \leq e^{-3}) = F_Y(e^{-3}) = 2 + \frac{1}{2} \ln(e^{-3}) = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2} = 0.5$$



Σχήμα 4: Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας $f_Y(y)$.

Άσκηση 2

Έστω τ.μ. X με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 - |x| & |x| < 1 \\ 0 & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Ορίζουμε μια νέα τ.μ. Y ως εξής:

$$Y = g(X) = \left\lfloor \frac{3(X+1)}{2} \right\rfloor$$

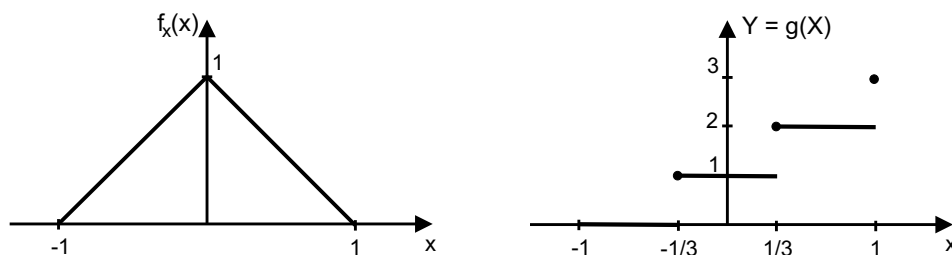
όπου $\lfloor a \rfloor$ συμβολίζει το ακέραιο μέρος του a , δηλαδή $\lfloor a \rfloor = \max\{m \in \mathbb{Z} \mid m \leq a\}$.

(α) Δώστε τις γραφικές παραστάσεις της σ.π.π. της τ.μ. X καθώς και του μετασχηματισμού $Y = g(X)$.

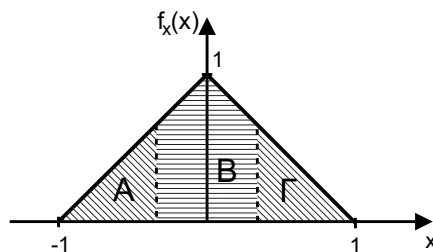
(β) Τι είδους τ.μ. είναι η Y ; Υπολογίστε την κατανομή της.

Λύση

(α)



Η Y παίρνει τις τιμές 0, 1, 2, 3 ανάλογα αν $-1 \leq X < -\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{3} \leq X < \frac{1}{3}$, $\frac{1}{3} \leq X < 1$, $X = 1$

(β)

Καθαρά, η τ.μ. Y είναι διακριτή.

$$P(Y = 0) = P(-1 \leq X < -\frac{1}{3}) = E(A) = \frac{2}{9}$$

$$P(Y = 1) = P(-\frac{1}{3} \leq X < \frac{1}{3}) = E(B) = \frac{5}{9}$$

$$P(Y = 2) = P(\frac{1}{3} \leq X < 1) = E(\Gamma) = \frac{2}{9}$$

$$P(Y = 3) = 0$$

Άσκηση 3

Έστω X τ.μ. με σ.π.π.:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x \in [-1, 0), \\ \frac{4}{9}x^2, & x \in [0, c], \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

(α) Βρείτε την τιμή της σταθεράς c , ώστε η $f_X(x)$ να είναι μία έγκυρη σ.π.π.

(β) Υπολογίστε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής $F_X(x)$, για όλα τα x .

(γ) Υπολογίστε τις μέσες τιμές $E[X]$ και $E[X^3]$.

(δ) Έστω $Y = \sqrt{X}$. Βρείτε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής $F_Y(y)$.

Λύση

(α) Δεδομένου ότι η f είναι μη αρνητική για όλα τα x , θα πρέπει:

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = \int_{-1}^0 \frac{1}{2} dx + \int_0^c \frac{4}{9} x^2 dx = \frac{1}{2} x \Big|_{-1}^0 + \frac{4x^3}{27} \Big|_0^c = 0 + \frac{1}{2} + \frac{4c^3}{27} - 0 = \frac{8c^3}{54} + \frac{27}{54}$$

Τελικά:

$$8c^3 = 27 \Leftrightarrow c = \frac{3}{2}$$

(β) $F_X(x) = 0$ για $x < -1$ και $F_X(x) = 1$ για $x > c$. Ακόμη:

Για $-1 \leq x < 0$:

$$F_X(x) = \int_{-1}^x \frac{1}{2} dx = \frac{x+1}{2}$$

Για $0 \leq x \leq c$:

$$F_X(x) = \int_{-1}^0 \frac{1}{2} dx + \int_0^x \frac{4}{9} x^2 dx = \frac{1}{2} + \frac{4x^3}{27}$$

Τελικά:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < -1, \\ \frac{x+1}{2}, & -1 \leq x < 0, \\ \frac{1}{2} + \frac{4x^3}{27}, & 0 \leq x \leq c, \\ 1, & x > c. \end{cases}$$

(γ)

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = \int_{-1}^0 \frac{1}{2} x dx + \int_0^c \frac{4}{9} x^3 dx = \frac{c^4}{9} - \frac{1}{4}$$

$$E[X^3] = \int_{-\infty}^{\infty} x^3 f_X(x) dx = \int_{-1}^0 \frac{1}{2} x^3 dx + \int_0^c \frac{4}{9} x^5 dx = \frac{4c^6}{54} - \frac{1}{8}$$

(δ) Η $Y = \sqrt{X}$ ορίζεται μόνο για $x \geq 0$, με $0 \leq y \leq \sqrt{c}$ αντίστοιχα. Έχουμε:

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(\sqrt{X} \leq y) = P(X \leq y^2) = F_X(y^2)$$

Τελικά:

$$F_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{4y^6}{27}, & 0 \leq y \leq \sqrt{c}, \\ 1, & y > \sqrt{c}. \end{cases}$$

Άσκηση 4

Έστω X , Y και Z τ.μ., όλες με μέση τιμή 0 και διασπορά 20. Ακόμη ισχύει, $\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(X, Z) = 10$ και $\text{Cov}(Y, Z) = 5$. Υπολογίστε τα παρακάτω:

- (i) $\text{Cov}(X + Y, X - Y)$.
- (ii) $\text{Cov}(3X + Z, 3X + Y)$.
- (iii) $E[(X + Y)^2]$.

Λύση

$$(i) \text{Cov}(X + Y, X - Y) = E[(X + Y)(X - Y)] - E[X + Y]E[X - Y] = E[X^2 - Y^2] - 0 = E[X^2] - E[Y^2] = \text{var}(X) + (E[X])^2 - \text{var}(Y) - (E[Y])^2 = \text{var}(X) - \text{var}(Y) = 0$$

$$(ii) \text{Cov}(3X + Z, 3X + Y) = E[(3X + Z)(3X + Y)] - E[3X + Z]E[3X + Y] = E[9X^2 + 3XY + 3XZ + YZ] - 0 = E[9X^2] + E[3XY] + E[3XZ] + E[YZ] = 9\text{var}(X) + 9(E[X])^2 + 3\text{cov}(X, Y) + 3\text{cov}(X, Z) + \text{cov}(Y, Z) = 9 \cdot 20 + 0 + 3 \cdot 10 + 3 \cdot 10 + 5 = 245$$

$$(iii) E[(X + Y)^2] = \text{var}(X + Y) + (E[X + Y])^2 = \text{var}(X + Y) = \text{var}(X) + \text{var}(Y) + 2\text{cov}(X, Y) = 20 + 20 + 2 \cdot 10 = 60$$