

HY-217: Πιθανότητες-Χειμερινό Εξάμηνο 2020
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Φροντιστήριο 10

Άσκηση 1 Θεωρούμε τις Τ.Μ. X και Y με από κοινού Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας που δίνεται από τον εξής τύπο:

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} c(2x + y) & 2 < x < 6, 0 < y < 5 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

, όπου c σταθερά με $c \in \mathbb{R}$.

- (i) Να βρεθεί η τιμή της σταθεράς c .
- (ii) Να βρεθούν οι περιθώριες Συναρτήσεις Πυκνότητας Πιθανότητας $f_X(x)$ και $f_Y(y)$.
- (iii) Να υπολογιστεί η πιθανότητα $P(3 < X < 4, Y > 2)$
- (iv) Να υπολογιστεί η πιθανότητα $P(X > 3)$
- (v) Να υπολογιστεί η πιθανότητα $P(X + Y > 4)$
- (vi) Είναι οι Τ.Μ. X και Y ανεξάρτητες;

Λύση

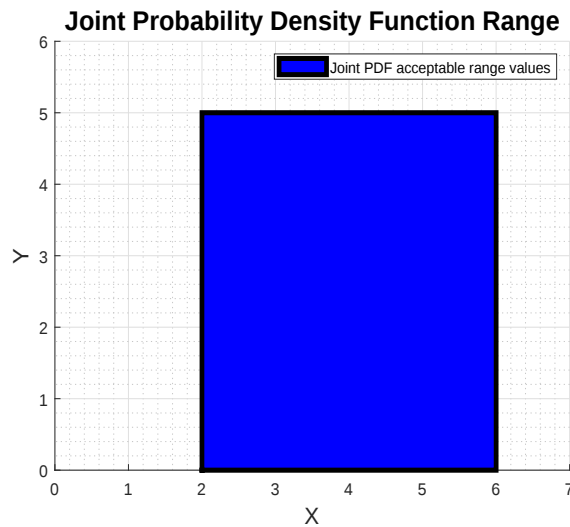
- (i) Για να αποτελεί η $f_{XY}(x, y)$ μία έγκυρη από κοινού Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας, θα πρέπει να ικανοποιεί την Συνθήκη Κανονικοποίησης:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x, y) dy dx &= 1 \Leftrightarrow \int_2^6 \int_0^5 [c(2x + y)] dy dx = 1 \Leftrightarrow c \int_2^6 \left(2x \left[y \right]_0^5 + \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^5 \right) dx = 1 \\ \Leftrightarrow c \int_2^6 \left(10x + \frac{25}{2} \right) dx &= 1 \Leftrightarrow c \left(10 \left[\frac{x^2}{2} \right]_2^6 + \frac{25}{2} \left[x \right]_2^6 \right) = 1 \Leftrightarrow c [10 \cdot 16 + \frac{25}{2} \cdot 4] = 1 \Leftrightarrow 210c = 1 \Leftrightarrow c = \frac{1}{210} \end{aligned}$$

Άρα, τελικά, η από κοινού Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας, $f_{XY}(x, y)$, θα δίνεται από τον τύπο:

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{210}(2x + y) & 2 < x < 6, 0 < y < 5 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Σχεδιάζοντας τα επιτρεπτά πεδία τιμών των Τ.Μ. X , Y , λαμβάνουμε την γραφική παράσταση του συνόλου τιμών της από κοινού Συνάρτησης Πυκνότητας Πιθανότητας (περιορισμένη στο διάστημα $[0, 7] \times [0, 6]$) που φαίνεται στο Σχήμα 1.



Σχήμα 1: Σύνολο Τιμών της από κοινού Συνάρτησης Πυκνότητας Πιθανότητας $f_{XY}(x, y)$.

- (ii) Με γνωστή την από κοινού Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας των X, Y , η Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας $f_X(x)$ δίνεται από τον εξής τύπο:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x, y) dy$$

Για $2 < x < 6$ έχουμε ότι:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x, y) dy = \int_0^5 \left(\frac{1}{210}(2x + y) \right) dy = \frac{1}{210} \left(2x \left[y \right]_0^5 + \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^5 \right) = \frac{1}{210} \left(10x + \frac{25}{2} \right)$$

Άρα, τελικά, η Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας, $f_X(x)$, θα δίνεται από τον τύπο:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{210} \left(10x + \frac{25}{2} \right) & 2 < x < 6 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Με γνωστή την από κοινού Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας των X, Y , η Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας $f_Y(y)$ δίνεται από τον εξής τύπο:

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x, y) dx$$

Για $0 < y < 5$ έχουμε ότι:

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x, y) dx = \int_2^6 \left(\frac{1}{210}(2x + y) \right) dx = \frac{1}{210} \left(2 \left[\frac{x^2}{2} \right]_2^6 + y \left[x \right]_2^6 \right) = \frac{1}{210} (32 + 4y)$$

Άρα, τελικά, η Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας, $f_Y(y)$, θα δίνεται από τον τύπο:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{210} (4y + 32) & 0 < y < 5 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

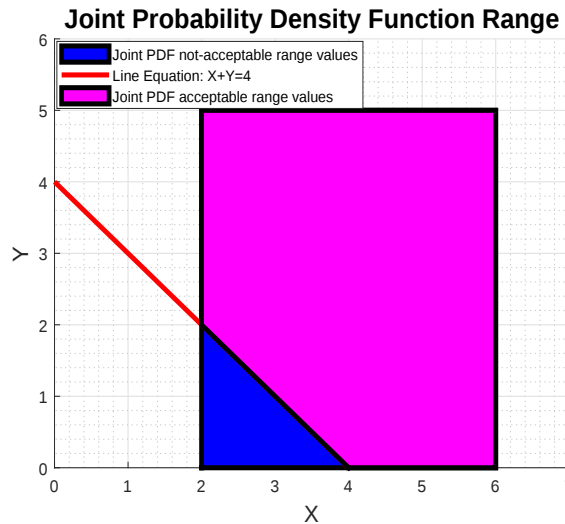
- (iii) Για τον υπολογισμό της ζητούμενης πιθανότητας, κάνοντας χρήση των ιδιοτήτων της από κοινού Συνάρτησης Πυκνότητας Πιθανότητας, έχουμε:

$$\begin{aligned}
 P(3 < X < 4, Y > 2) &= \int_3^4 \int_2^5 f_{XY}(x, y) dy dx = \int_3^4 \int_2^5 \left(\frac{1}{210}(2x + y) \right) dy dx \\
 &= \frac{1}{210} \left[\int_3^4 \left(2x \left[y \right]_2^5 + \left[\frac{y^2}{2} \right]_2^5 \right) dx \right] = \frac{1}{210} \left[\int_3^4 \left(6x + \frac{21}{2} \right) dx \right] = \frac{1}{210} \left(6 \left[\frac{x^2}{2} \right]_3^4 + \frac{21}{2} \left[x \right]_3^4 \right) \\
 &= \frac{1}{210} \left(6 \cdot \frac{7}{2} + \frac{21}{2} \right) = \frac{1}{210} \cdot \frac{63}{2} = \frac{63}{420} = \frac{3}{20}
 \end{aligned}$$

- (iv) Για τον υπολογισμό της ζητούμενης πιθανότητας, κάνοντας χρήση των ιδιοτήτων της από κοινού Συνάρτησης Πυκνότητας Πιθανότητας, έχουμε:

$$\begin{aligned}
 P(X > 3) &= \int_3^6 \int_0^5 f_{XY}(x, y) dy dx = \int_3^6 \int_0^5 \left(\frac{1}{210}(2x + y) \right) dy dx \\
 &= \frac{1}{210} \left[\int_3^6 \left(2x \left[y \right]_0^5 + \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^5 \right) dx \right] = \frac{1}{210} \left[\int_3^6 \left(10x + \frac{25}{2} \right) dx \right] = \frac{1}{210} \left(10 \left[\frac{x^2}{2} \right]_3^6 + \frac{25}{2} \left[x \right]_3^6 \right) \\
 &= \frac{1}{210} \left(10 \cdot \frac{27}{2} + 3 \cdot \frac{25}{2} \right) = \frac{1}{210} \cdot \frac{345}{2} = \frac{345}{420} = \frac{23}{28}
 \end{aligned}$$

- (v) Για τον υπολογισμό της ζητούμενης πιθανότητας, με βάση το Σχήμα 2, έχουμε:



Σχήμα 2: Γραφικός υπολογισμός της $P(X + Y > 4)$.

$$\begin{aligned}
 P(X + Y > 4) &= 1 - P(X + Y \leq 4) = 1 - \int_2^4 \int_0^{4-x} f_{XY}(x, y) dy dx = 1 - \int_2^4 \int_0^{4-x} \left(\frac{1}{210}(2x + y) \right) dy dx \\
 &= 1 - \frac{1}{210} \left[\int_2^4 \left(2x \left[y \right]_0^{4-x} + \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^{4-x} \right) dx \right] = 1 - \frac{1}{210} \left[\int_2^4 \left(2x(4-x) + \frac{(4-x)^2}{2} \right) dx \right] \\
 &= 1 - \frac{1}{210} \left[\int_2^4 \left(8x - 2x^2 + \frac{x^2 - 8x + 16}{2} \right) dx \right] = 1 - \frac{1}{210} \left[\int_2^4 \left(8x - 2x^2 + \frac{1}{2}x^2 - 4x + 8 \right) dx \right] \\
 &= 1 - \frac{1}{210} \left[\int_2^4 \left(-\frac{3}{2}x^2 + 4x + 8 \right) dx \right] = 1 - \frac{1}{210} \left(-\frac{3}{2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_2^4 + 4 \left[\frac{x^2}{2} \right]_2^4 + 8 \left[x \right]_2^4 \right) \\
 &= 1 - \frac{1}{210} \left(-\frac{3}{2} \cdot \frac{56}{3} + 4 \cdot \frac{12}{2} + 8 \cdot 2 \right) = 1 - \frac{1}{210} (-28 + 24 + 16) = 1 - \frac{1}{210} \cdot 12 = \frac{198}{210} = \frac{33}{35}
 \end{aligned}$$

(vi) Παρατηρούμε ότι εν προκειμένω ισχύει η σχέση :

$$f(x, y) \neq f_X(x)f_Y(y)$$

Ως εκ τούτου, οι Τ.Μ. X, Y δεν είναι ανεξάρτητες.

Άσκηση 2. Θεωρούμε τις Τ.Μ. X και Y με από κοινού Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας που δίνεται από τον εξής τύπο:

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} y^{-1}e^{-y-\frac{x}{y}}, & x, y > 0 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

- (i) Να υπολογιστεί η περιθώρια Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας $f_Y(y)$.
- (ii) Να υπολογιστεί η δεσμευμένη Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας $f_{X|Y}(x | y)$.
- (iii) Να υπολογιστεί η δεσμευμένη Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής $F_{X|Y}(x | y)$.
- (iv) Να υπολογιστεί η πιθανότητα $P(X > 1 | Y = y)$.
- (v) Να υπολογιστεί η δεσμευμένη Μέση Τιμή $E[X | Y = y], y > 0$.

Λύση

- (i) Με γνωστή την από κοινού Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας των X, Y , η Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας $f_Y(y)$ δίνεται από τον εξής τύπο :

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x, y) dx$$

Για $y > 0$ έχουμε ότι :

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x, y) dx = \int_0^{+\infty} \left(y^{-1} e^{-y-\frac{x}{y}} \right) dx = \frac{e^{-y}}{y} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x}{y}} dx = \frac{e^{-y}}{y} \left[-ye^{-\frac{x}{y}} \right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{e^{-y}}{y} \left[-\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{y}{e^{\frac{x}{y}}} \right) + y \right] = \frac{e^{-y}}{y} (0 + y) = e^{-y} \end{aligned}$$

Άρα, τελικά, η Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας, $f_Y(y)$, θα δίνεται από τον τύπο :

$$f_Y(y) = \begin{cases} e^{-y} & y > 0 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

- (ii) Με γνωστή την από κοινού Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας των X, Y , καθώς και την Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας $f_Y(y)$, η δεσμευμένη Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας $f_{X|Y}(x | y)$ δίνεται από τον εξής τύπο :

$$f_{X|Y}(x | y) = \frac{f_{XY}(x, y)}{f_Y(y)}$$

Για $x, y > 0$ έχουμε ότι:

$$f_{X|Y}(x | y) = \frac{f_{XY}(x, y)}{f_Y(y)} = \frac{y^{-1}e^{-y-\frac{x}{y}}}{e^{-y}} = \frac{e^{-\frac{x}{y}}}{y}$$

Άρα, τελικά, η δεσμευμένη Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας, $f_{X|Y}(x | y)$, θα δίνεται από τον τύπο:

$$f_{X|Y}(x | y) = \begin{cases} \frac{e^{-\frac{x}{y}}}{y} & x, y > 0 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

(iii) Με γνωστή την δεσμευμένη Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας $f_{X|Y}(x | y)$, η δεσμευμένη Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής $F_{X|Y}(x | y)$ δίνεται από τον εξής τύπο:

$$F_{X|Y}(x | y) = \int_{-\infty}^x f_{X|Y}(z | y) dz$$

Για $x, y > 0$ έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} F_{X|Y}(x | y) &= \int_{-\infty}^x f_{X|Y}(z | y) dz = \int_0^x f_{X|Y}(z | y) dz = \int_0^x \frac{1}{y} e^{-\frac{z}{y}} dz \\ &= \frac{1}{y} \left[-ye^{-\frac{z}{y}} \right]_0^x = \frac{1}{y} (-ye^{-\frac{x}{y}} + y) = e^{-\frac{x}{y}} + 1 \end{aligned}$$

Άρα, τελικά, η δεσμευμένη Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής, $F_{X|Y}(x | y)$, θα δίνεται από τον τύπο:

$$F_{X|Y}(x | y) = \begin{cases} e^{-\frac{x}{y}} + 1 & x, y > 0 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

(iv) Για τον υπολογισμό της ζητούμενης πιθανότητας, εφαρμόζοντας τις ιδιότητες της Αθροιστικής Συνάρτησης Κατανομής, έχουμε:

$$P(X > 1 | Y = y) = 1 - P(X \leq 1 | Y = y) = 1 - F_{X|Y}(1, y) = 1 - (1 - e^{-\frac{1}{y}}) = e^{-\frac{1}{y}}$$

(v) Για τον υπολογισμό της δεσμευμένης Μέσης Τιμής $E[X | Y = y]$, $y > 0$, έχουμε:

$$\begin{aligned} E(X | Y = y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X|Y}(x | y) dx = \int_0^{+\infty} x \frac{1}{y} e^{-\frac{x}{y}} dx = \frac{1}{y} \int_0^{+\infty} x e^{-\frac{x}{y}} dx \\ &= \frac{1}{y} \left(\left[-xye^{-\frac{x}{y}} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} ye^{-\frac{x}{y}} dx \right) = \frac{1}{y} \left(0 + y \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x}{y}} dx \right) \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x}{y}} dx = \left[-ye^{-\frac{x}{y}} \right]_0^{+\infty} = \left[-\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{y}{e^{\frac{x}{y}}} \right) + y \right] = 0 + y = y \end{aligned}$$

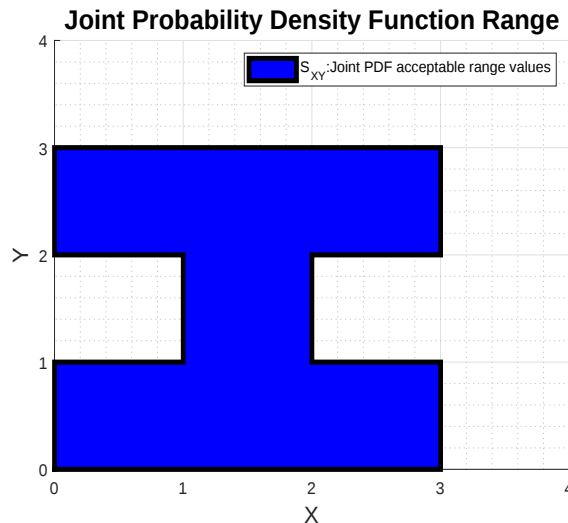
Άσκηση 3. Οι συνεχείς Τ.Μ. X και Y έχουν σύνολο τιμών το γραμμοσκιασμένο χωρίο S_{XY} που φαίνεται στο Σχήμα 1.

Οι X και Y ακολουθούν από κοινού Ομοιόμορφη Κατανομή που δίνεται από τον εξής τύπο:

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} c, & (x, y) \in S_{XY} \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

, όπου c σταθερά με $c \in \mathbb{R}$.

- (i) Να υπολογιστεί η σταθερά c .
- (ii) Να υπολογιστεί η πιθανότητα $P(Y < X - 1)$.
- (iii) Να υπολογιστεί η πιθανότητα $P[(X - 1.5)^2 + (Y - 1.5)^2 > (0.5)^2]$.
- (iv) Να υπολογιστεί η περιθώρια Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας $f_X(x)$.



Σχήμα 1: Σύνολο Τιμών της από κοινού Συνάρτησης Πυκνότητας Πιθανότητας $f_{XY}(x, y)$.

Λύση

- (i) Από το σχήμα που δίνεται στην εκφώνησης της Εργασίας, έχουμε:

$$E_{S_{XY}} = E - 2 \cdot E_{\text{Τετραγώνου}} = 9 - 2 \cdot 1 = 7$$

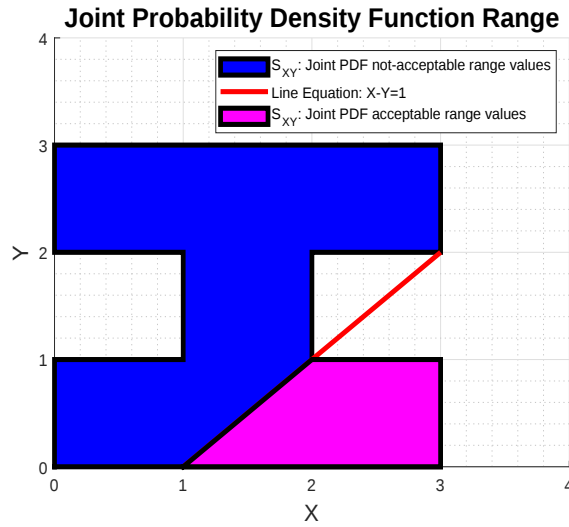
Επομένως, για την σταθερά c θα ισχύει:

$$c \cdot E_{S_{XY}} = 1 \Leftrightarrow c = \frac{1}{E_{S_{XY}}} \Leftrightarrow c = \frac{1}{7}$$

Άρα, τελικά, η από κοινού Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας, $f_{XY}(x, y)$, θα δίνεται από τον τύπο:

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{7}, & (x, y) \in S_{XY} \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

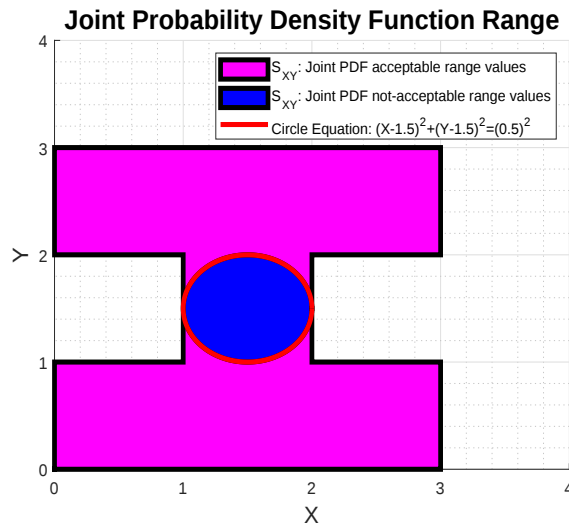
(ii) Για τον υπολογισμό της ζητούμενης πιθανότητας, με βάση το Σχήμα 3, έχουμε:



Σχήμα 3: Γραφικός υπολογισμός της $P(Y < X - 1)$.

$$P(Y < X - 1) = c \cdot E_{\text{Τραπεζίου}} = \frac{1}{7} \cdot \frac{(1+2) \cdot 1}{2} = \frac{3}{14}$$

(iii) Για τον υπολογισμό της ζητούμενης πιθανότητας, ουσιαστικά χρειάζεται να υπολογίσουμε την πιθανότητα να βρεθούμε εκτός του κύκλου με κέντρο το $K(1.5, 1.5)$ και ακτίνα $\rho = 0.5$. Οπότε, με βάση το Σχήμα 4, έχουμε:



Σχήμα 4: Γραφικός υπολογισμός της $P[(X - 1.5)^2 + (Y - 1.5)^2 > (0.5)^2]$.

$$\begin{aligned} P[(X - 1.5)^2 + (Y - 1.5)^2 > (0.5)^2] &= 1 - P[(X - 1.5)^2 + (Y - 1.5)^2 \leq (0.5)^2] = 1 - c \cdot E_{\text{Κύκλου}} \\ &= 1 - \frac{1}{7} \cdot \pi \rho^2 = 1 - \frac{1}{7} \cdot \pi (0.5)^2 = 1 - \frac{1}{7} \cdot 0.25\pi = 1 - 0.0357\pi \approx 1 - 0.1122 = 0.8878 \end{aligned}$$

- (iv) Με γνωστή την από κοινού Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας των X, Y , η Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας $f_X(x)$ δίνεται από τον εξής τύπο:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x, y) dy$$

Για $x < 0$ έχουμε ότι:

$$f_X(x) = 0$$

Για $0 \leq x < 1$ έχουμε ότι:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x, y) dy = \int_0^1 \frac{1}{7} dy + \int_2^3 \frac{1}{7} dy = \frac{1}{7} \cdot \left[y \right]_0^1 + \frac{1}{7} \cdot \left[y \right]_2^3 = \frac{1}{7} \cdot 1 + \frac{1}{7} \cdot 1 = \frac{2}{7}$$

Για $1 \leq x < 2$ έχουμε ότι:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x, y) dy = \int_0^3 \frac{1}{7} dy = \frac{1}{7} \cdot \left[y \right]_0^3 = \frac{1}{7} \cdot 3 = \frac{3}{7}$$

Για $2 \leq x < 3$ έχουμε ότι:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x, y) dy = \int_0^1 \frac{1}{7} dy + \int_2^3 \frac{1}{7} dy = \frac{1}{7} \cdot \left[y \right]_0^1 + \frac{1}{7} \cdot \left[y \right]_2^3 = \frac{1}{7} \cdot 1 + \frac{1}{7} \cdot 1 = \frac{2}{7}$$

Για $x \geq 3$ έχουμε ότι:

$$f_X(x) = 0$$

Άρα, τελικά, η Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας, $f_X(x)$, θα δίνεται από τον τύπο:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{2}{7} & 0 \leq x < 1 \\ \frac{3}{7} & 1 \leq x < 2 \\ \frac{2}{7} & 2 \leq x < 3 \\ 0 & x \geq 3 \end{cases}$$