

Πανεπιστήμιο Κρήτης - Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

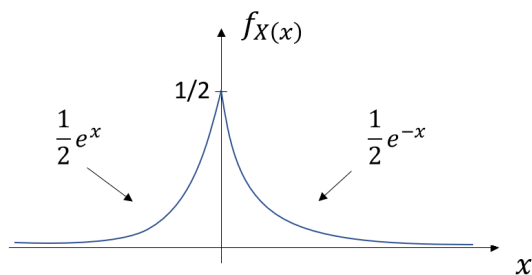
Πιθανότητες

Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Λύσεις Τελικής Εξέτασης - 31 Αυγούστου 2021

Θέμα 1 - 25 μονάδες

(α) Η γραφική παράσταση της σ.π.π. της τ.μ. X φαίνεται στο Σχήμα 1.



Σχήμα 1: Η γραφική παράσταση της $f_X(x)$.

(β) Για $x \leq 0$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt = \int_{-\infty}^x \frac{1}{2} e^t dt = \left[\frac{1}{2} e^t \right]_{-\infty}^x = \frac{1}{2} e^x$$

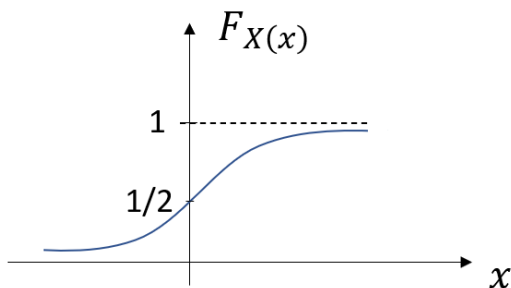
Για $x \geq 0$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{2} e^t dt + \int_0^x \frac{1}{2} e^{-t} dt = \left[\frac{1}{2} e^t \right]_{-\infty}^0 + \left[-\frac{1}{2} e^{-t} \right]_0^x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-x} + \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} e^{-x}$$

Συνεπώς, η α.σ.κ. της τ.μ. X είναι η

$$F_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^x & , x \leq 0 \\ 1 - \frac{1}{2} e^{-x} & , x \geq 0 \end{cases}$$

με γραφική παράσταση που φαίνεται στο Σχήμα 2.



Σχήμα 2: Η γραφική παράσταση της $F_X(x)$.

(γ) $P(X \leq 2 \text{ ή } X \geq 0) = P(-\infty < X < +\infty) = 1$

(δ) $P(X \leq 2 \text{ και } X \geq 0) = P(0 \leq X \leq 2) = F_X(2) - F_X(0) = (1 - \frac{1}{2} e^{-2}) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(1 - e^{-2}) = 0.4323$

Θέμα 2 - 25 μονάδες.

(α) Είναι:

$$\begin{aligned}
 P(|X| < 2) &= P(-2 < X < 2) = P\left(\frac{-2-1}{6} < \frac{X-1}{6} < \frac{2-1}{6}\right) \\
 &= P\left(\frac{-1}{2} < \frac{X-1}{6} < \frac{1}{6}\right) = \Phi\left(\frac{1}{6}\right) - \Phi\left(\frac{1}{2}\right) \\
 &= \Phi\left(\frac{1}{6}\right) + \Phi\left(\frac{1}{2}\right) - 1.
 \end{aligned}$$

(β) Είναι:

$$\begin{aligned}
 E[(X+2)^2] &= E[X^2 + 4X + 4] = E[X^2] + 4E[X] + 4 \\
 &= \text{var}(X) + E^2[X] + 4E[X] + 4 \\
 &= 36 + 1^2 + 4 \cdot 1 + 4 = 45.
 \end{aligned}$$

(γ) Εφόσον $Y = (X - 1)^2$, η τ.μ. Y παίρνει μη-αρνητικές τιμές. Συνεπώς, $f_Y(y)$, για $y < 0$.Για $y \geq 0$, έχουμε:

$$\begin{aligned}
 F_Y(y) &= P(Y \leq y) = P((X - 1)^2 \leq y) = P(-\sqrt{y} \leq X - 1 \leq \sqrt{y}) \\
 &= P(1 - \sqrt{y} \leq X \leq 1 + \sqrt{y}) \\
 &= P\left(\frac{1 - \sqrt{y} - 1}{6} \leq \frac{X - 1}{6} \leq \frac{1 + \sqrt{y} - 1}{6}\right) \\
 &= \Phi\left(\frac{\sqrt{y}}{6}\right) - \Phi\left(\frac{-\sqrt{y}}{6}\right) = 2\Phi\left(\frac{\sqrt{y}}{6}\right) - 1.
 \end{aligned}$$

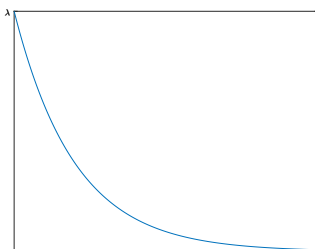
Συνεπώς, έχουμε: $f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = 2 \frac{d}{dy} \Phi\left(\frac{\sqrt{y}}{6}\right)$.Η $\Phi(u)$ είναι η ΑΣΚ της τυπικής Γκαουσιανής: $\Phi'(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}}$.

Έτσι, τελικά, έχουμε:

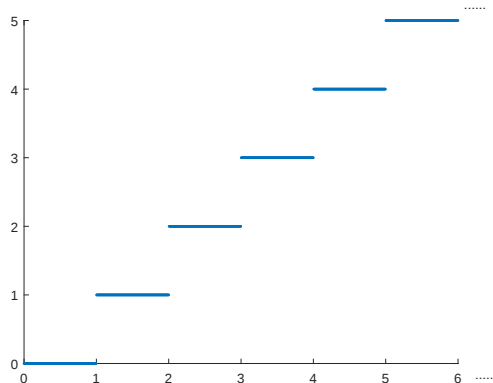
$$\begin{aligned}
 f_Y(y) &= 2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\left(\frac{\sqrt{y}}{6}\right)^2}{2}} \cdot \frac{d}{dy} \left(\frac{\sqrt{y}}{6}\right) \\
 &= 2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y}{72}} \cdot \frac{1}{2} \frac{1}{6\sqrt{y}} \\
 &= \frac{1}{6\sqrt{2\pi y}} e^{-\frac{y}{72}}, y \geq 0.
 \end{aligned}$$

Θέμα 3 - 25 μονάδες.

α') Γνωρίζουμε ότι για τη Λαπλασιανή τ.μ. η συνάρτηση πιθανότητας δίνεται από την $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ και η αθροιστική συνάρτηση πιθανότητας από την $F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}$



Σχήμα 3: $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$



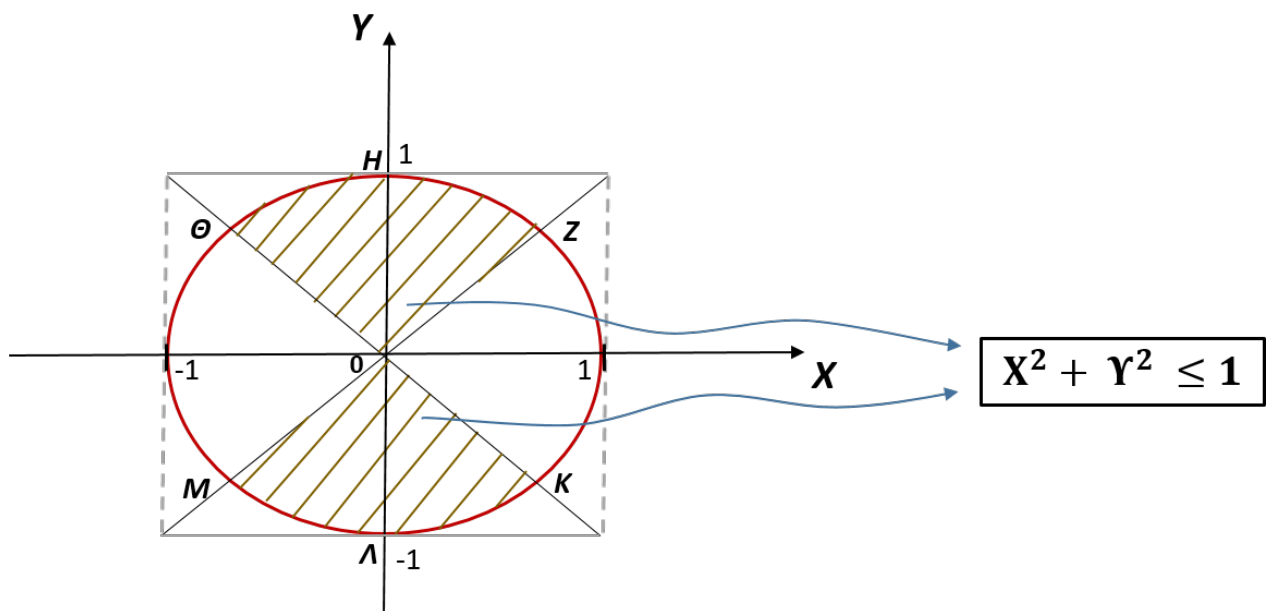
Σχήμα 4: Η γραφική παράσταση της Y .

β') Προφανώς η τ.μ. Y είναι διακριτή με πεδίο τιμών $\{0, 1, 2, \dots\}$.

$$\begin{aligned}
 P_Y(k) &= P(Y = k) = P(k \leq X < k + 1) \\
 &= F_X(k + 1) - F_X(k) \\
 &= 1 - e^{-\lambda(k+1)} - (1 - e^{-\lambda k}) \\
 &= e^{-\lambda k} - e^{-\lambda(k+1)} \\
 &= e^{-\lambda k}(1 - e^{-\lambda})
 \end{aligned}$$

Επομένως,

$$P_Y(k) = \begin{cases} e^{-\lambda k}(1 - e^{-\lambda}), & k = 0, 1, 2, \dots \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases}$$



Σχήμα 6: Η ζητούμενη γραφική παράσταση στο ερώτημα 4 (γ).