

Πανεπιστήμιο Κρήτης - Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών
Θεωρία Πιθανοτήτων - Τελική Εξέταση
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης
31 Αυγούστου 2021 - Διάρκεια: 2 Ώρες

Θέμα 1 - 25 μονάδες. Μία συνεχής τυχαία μεταβλητή (τ.μ.) X έχει τη Λαπλασιανή συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.)

$$f_X(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|} \quad -\infty < x < +\infty,$$

- (α) Να δώσετε τη γραφική παράσταση της σ.π.π.
- (β) Υπολογίστε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής (α.σ.κ.) της τ.μ. X και δώστε την γραφική της παράσταση.
- (γ) Υπολογίστε την πιθανότητα $P(X \leq 2 \text{ ή } X \geq 0)$.
- (δ) Υπολογίστε την πιθανότητα $P(X \leq 2 \text{ και } X \geq 0)$.

Θέμα 2 - 25 μονάδες. Η τ.μ. X ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή $\mu = 1$ και διασπορά $\sigma^2 = 36$: $X \sim N(1, 36)$.

- (α) Υπολογίστε την πιθανότητα $P(|X| < 2)$. Εκφράστε την απάντησή σας βάσει τιμών της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής της τυπικής Γκαουσιανής, $\Phi(u)$.
- (β) Υπολογίστε την $E[(X + 2)^2]$.
- (γ) Έστω η τ.μ. $Y = (X - 1)^2$. Βρείτε τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, $f_Y(y)$, της Y .

Θέμα 3 - 25 μονάδες. Έστω ότι η τ.μ. X είναι εκθετικά κατανεμημένη με παράμετρο λ . Η κβαντισμένη τιμή της X δίνεται ως ο μετασχηματισμός

$$Y = k, \quad \text{όταν } k \leq X < k + 1, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

- (α) Δώστε τη γραφική παράσταση του μετασχηματισμού.
- (β) Τι είδους τ.μ. είναι η Y ; Δώστε την πλήρη στατιστική περιγραφή της (συνάρτηση πιθανότητας ή συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας).

Θέμα 4 - 25 μονάδες. Οι συνεχείς τ.μ. X και Y έχουν από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.):

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} c & 0 \leq |x| \leq |y|, \quad 0 \leq |y| \leq 1, \\ 0 & \text{αλλού.} \end{cases}$$

- (α) Δώστε τη γραφική παράσταση της από κοινού σ.π.π. και υπολογίστε τη σταθερά c .
- (β) Υπολογίστε την περιθωριακή σ.π.π. της τ.μ. X .
- (γ) Υπολογίστε την πιθανότητα $P(X^2 + Y^2 \leq 1)$.