

Πανεπιστήμιο Κρήτης - Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών
ΗΥ-217 - Θεωρία Πιθανοτήτων 2020
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης
14 Νοεμβρίου 2020 - Διάρκεια: 1.5 Ώρες
Θέμα 3

Θέμα 3.1

Δύο τυχαίες μεταβλητές X και Y παίρνουν τιμές x και y , αντίστοιχα, στο σύνολο $\{0, 1, 2, 3\}$. Στον πίνακα που ακολουθεί μας δίδεται μερική πληροφορία για την από κοινού συνάρτηση πιθανότητας $p_{X,Y}(x, y)$ και τις περιθωριακές συναρτήσεις πιθανότητας $p_X(x)$ και $p_Y(y)$ των τ.μ. X και Y αντίστοιχα. Επίσης, δίδεται ότι $P(X = Y) = 0.06$.

$Y \backslash X$	$x = 0$	$x = 1$	$x = 2$	$x = 3$	$p_Y(y)$
$y = 0$	0.01	0	0.09	0.05	0.15
$y = 1$	?	0	0.01	0.2	?
$y = 2$	0.1	?	0.05	?	0.3
$y = 3$	?	0.1	0.05	?	0.25
$p_X(x)$	0.3	0.2	0.2	?	

(α) Χρησιμοποιώντας την πληροφορία που σας δίδεται, συμπληρώστε τις τιμές που λείπουν από τον πίνακα. Θα πρέπει να περιγράψετε αναλυτικά πώς προέκυψε η κάθε τιμή που υπολογίσατε.

(β) Υπολογίστε την πιθανότητα η τ.μ. X να παίρνει τιμές μεγαλύτερες από την τ.μ. Y .

(γ) Δεδομένου ότι $Y = 2$, ποια είναι η δεσμευμένη πιθανότητα ότι $X = 3$; Βρείτε, επίσης, τη δεσμευμένη πιθανότητα $P(X \text{ είναι ζυγός} \mid Y \text{ είναι ζυγός})$.

(δ) Έστω $Z = 5Y - X^2$. Βρείτε τη μέση τιμή, $E[Z]$, της τ.μ. Z .

(ε) Είναι οι τ.μ. X και Y ανεξάρτητες; Αιτιολογήστε.

Λύση:

(α) Δεδομένου ότι $P(X = Y) = 0.06$ ισχύει:

$$p_{X,Y}(0, 0) + p_{X,Y}(1, 1) + p_{X,Y}(2, 2) + p_{X,Y}(3, 3) = 0.06 \Leftrightarrow 0.01 + 0 + 0.05 + p_{X,Y}(3, 3) = 0.06 \Leftrightarrow \underline{p_{X,Y}(3, 3) = 0}$$

Ακόμη:

$$p_Y(3) = p_{X,Y}(0, 3) + p_{X,Y}(1, 3) + p_{X,Y}(2, 3) + p_{X,Y}(3, 3) \Leftrightarrow 0.25 = p_{X,Y}(0, 3) + 0.1 + 0.05 + 0 \Leftrightarrow \underline{p_{X,Y}(0, 3) = 0.1}$$

$$p_X(0) = p_{X,Y}(0, 0) + p_{X,Y}(0, 1) + p_{X,Y}(0, 2) + p_{X,Y}(0, 3) \Leftrightarrow 0.3 = 0.01 + p_{X,Y}(0, 1) + 0.1 + 0.1 \Leftrightarrow \underline{p_{X,Y}(0, 1) = 0.09}$$

Με αντίστοιχο τρόπο προκύπτουν και οι υπόλοιπες τιμές που φαίνονται στον πίνακα.

$$\underline{\text{(β)}} \quad P(X > Y) = p_{X,Y}(1, 0) + p_{X,Y}(2, 0) + p_{X,Y}(3, 0) + p_{X,Y}(2, 1) + p_{X,Y}(3, 1) + p_{X,Y}(3, 2) = 0 + 0.09 + 0.05 + 0.01 + 0.2 + 0.05 = 0.4.$$

$Y \backslash X$	$x = 0$	$x = 1$	$x = 2$	$x = 3$	$p_Y(y)$
$y = 0$	0.01	0	0.09	0.05	0.15
$y = 1$	0.09	0	0.01	0.2	0.3
$y = 2$	0.1	0.1	0.05	0.05	0.3
$y = 3$	0.1	0.1	0.05	0	0.25
$p_X(x)$	0.3	0.2	0.2	0.3	

$$(γ) P(X = 3|Y = 2) = \frac{P(X = 3, Y = 2)}{P(Y = 2)} = \frac{0.05}{0.3} = \frac{1}{6}.$$

$$\begin{aligned} P(X \text{ είναι ζυγός} | Y \text{ είναι ζυγός}) &= \frac{P(X \text{ είναι ζυγός}, Y \text{ είναι ζυγός})}{P(Y \text{ είναι ζυγός})} = \\ &= \frac{p_{X,Y}(0,0) + p_{X,Y}(0,2) + p_{X,Y}(2,0) + p_{X,Y}(2,2)}{p_Y(0) + p_Y(2)} = \frac{0.01 + 0.1 + 0.09 + 0.05}{0.15 + 0.3} = \frac{0.25}{0.45} = \frac{5}{9}. \end{aligned}$$

$$(δ) E[Z] = E[5Y - X^2] = 5E[Y] - E[X^2] = 5 \cdot (0 \cdot 0.15 + 1 \cdot 0.3 + 2 \cdot 0.3 + 3 \cdot 0.25) - (0^2 \cdot 0.3 + 1^2 \cdot 0.2 + 2^2 \cdot 0.2 + 3^2 \cdot 0.3) = 5 \cdot (0 + 0.3 + 0.6 + 0.75) - (0 + 0.2 + 0.8 + 2.7) = 5 \cdot 1.65 - 3.7 = 4.55.$$

(ε) Δεδομένης της γνώσης ότι $X = 1$, γνωρίζουμε ότι η Y δεν μπορεί να πάρει τις τιμές 0 και 1. Αυτό συνεπάγεται σχέση εξάρτησης ανάμεσα στις X και Y και επομένως δεν είναι ανεξάρτητες.

$$\begin{aligned} \text{Εναλλακτικά, μπορούμε να δείξουμε ότι } p_Y(0) \neq p_{Y|X}(Y = 0|X = 1) &\Leftrightarrow 0.15 \neq \frac{p_{X,Y}(1,0)}{p_X(1)} \Leftrightarrow \\ 0.15 \neq \frac{0}{p_X(1)} &\Leftrightarrow 0.15 \neq 0, \text{ που ισχύει.} \end{aligned}$$

Θέμα 3.2

Δύο τυχαίες μεταβλητές X και Y παίρνουν τιμές x και y , αντίστοιχα, στο σύνολο $\{0, 1, 2, 3\}$. Στον πίνακα που ακολουθεί μας δίδεται μερική πληροφορία για την από κοινού συνάρτηση πιθανότητας $p_{X,Y}(x, y)$ και τις περιθωριακές συναρτήσεις πιθανότητας $p_X(x)$ και $p_Y(y)$ των τ.μ. X και Y αντίστοιχα. Επίσης, δίδεται ότι $P(X > Y) = 0.28$.

$Y \backslash X$	$x = 0$	$x = 1$	$x = 2$	$x = 3$	$p_Y(y)$
$y = 0$	0.02	0	0	0.03	0.05
$y = 1$	0.15	?	0.05	0.1	?
$y = 2$	0.1	?	0	?	0.4
$y = 3$	?	0	0.15	?	0.2
$p_X(x)$	0.3	0.25	0.2	?	

(α) Χρησιμοποιώντας την πληροφορία που σας δίδεται, συμπληρώστε τις τιμές που λείπουν από τον πίνακα. Θα πρέπει να περιγράψετε αναλυτικά πώς προέκυψε η κάθε τιμή που υπολογίσατε.

(β) Υπολογίστε την πιθανότητα η τ.μ. X να παίρνει τιμές ίσες με την τ.μ. Y .

(γ) Δεδομένου ότι $Y = 1$, ποια είναι η δεσμευμένη πιθανότητα ότι $X = 1$; Βρείτε, επίσης, τη δεσμευμένη πιθανότητα $P(X \text{ είναι περιττός} \mid Y \text{ είναι ζυγός})$.

(δ) Έστω $Z = 5Y^2 - X + 10$. Βρείτε τη μέση τιμή, $E[Z]$, της τ.μ. Z .

(ε) Είναι οι τ.μ. X και Y ανεξάρτητες; Αιτιολογήστε.

Λύση:

(α) Δεδομένου ότι $P(X > Y) = 0.28$ ισχύει:

$$p_{X,Y}(1, 0) + p_{X,Y}(2, 0) + p_{X,Y}(3, 0) + p_{X,Y}(2, 1) + p_{X,Y}(3, 1) + p_{X,Y}(3, 2) = 0.28 \Leftrightarrow 0 + 0 + 0.03 + 0.05 + 0.1 + p_{X,Y}(3, 2) = 0.28 \Leftrightarrow \underline{p_{X,Y}(3, 2) = 0.1}$$

Ακόμη:

$$p_Y(2) = p_{X,Y}(0, 2) + p_{X,Y}(1, 2) + p_{X,Y}(2, 2) + p_{X,Y}(3, 2) \Leftrightarrow 0.4 = 0.1 + p_{X,Y}(1, 2) + 0 + 0.1 \Leftrightarrow \underline{p_{X,Y}(1, 2) = 0.2}$$

$$p_X(0) = p_{X,Y}(0, 0) + p_{X,Y}(0, 1) + p_{X,Y}(0, 2) + p_{X,Y}(0, 3) \Leftrightarrow 0.3 = 0.02 + 0.15 + 0.1 + p_{X,Y}(0, 3) \Leftrightarrow \underline{p_{X,Y}(0, 3) = 0.03}$$

Με αντίστοιχο τρόπο προκύπτουν και οι υπόλοιπες τιμές, που φαίνονται στον πίνακα.

$Y \backslash X$	$x = 0$	$x = 1$	$x = 2$	$x = 3$	$p_Y(y)$
$y = 0$	0.02	0	0	0.03	0.05
$y = 1$	0.15	0.05	0.05	0.1	0.35
$y = 2$	0.1	0.2	0	0.1	0.4
$y = 3$	0.03	0	0.15	0.02	0.2
$p_X(x)$	0.3	0.25	0.2	0.25	

$$\textbf{(β)} P(X = Y) = p_{X,Y}(0,0) + p_{X,Y}(1,1) + p_{X,Y}(2,2) + p_{X,Y}(3,3) = 0.02 + 0.05 + 0 + 0.02 = 0.09.$$

$$\textbf{(γ)} P(X = 1|Y = 1) = \frac{P(X = 1, Y = 1)}{P(Y = 1)} = \frac{0.05}{0.35} = \frac{1}{7}.$$

$$\begin{aligned} P(X \text{ είναι περιττός} \mid Y \text{ είναι ζυγός}) &= \frac{P(X \text{ είναι περιττός}, Y \text{ είναι ζυγός})}{P(Y \text{ είναι ζυγός})} = \\ &= \frac{p_{X,Y}(1,0) + p_{X,Y}(1,2) + p_{X,Y}(3,0) + p_{X,Y}(3,2)}{p_Y(0) + p_Y(2)} = \frac{0 + 0.2 + 0.03 + 0.1}{0.05 + 0.4} = \frac{0.33}{0.45} = \frac{11}{15}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textbf{(δ)} E[Z] &= E[5Y^2 - X + 10] = 5E[Y^2] - E[X] + 10 = 5 \cdot (0^2 \cdot 0.05 + 1^2 \cdot 0.35 + 2^2 \cdot 0.4 + 3^2 \cdot 0.2) - \\ &= (0 \cdot 0.3 + 1 \cdot 0.25 + 2 \cdot 0.2 + 3 \cdot 0.25) + 10 = 5 \cdot (0 + 0.35 + 1.6 + 1.8) - (0 + 0.25 + 0.4 + 0.75) + 10 = \\ &= 5 \cdot 3.75 - 1.4 + 10 = 27.35. \end{aligned}$$

(ε) Δεδομένης της γνώσης ότι $Y = 0$, γνωρίζουμε ότι η X δεν μπορεί να πάρει τις τιμές 1 και 2. Αυτό συνεπάγεται σχέση εξάρτησης ανάμεσα στις X και Y και επομένως δεν είναι ανεξάρτητες.

$$\begin{aligned} \text{Εναλλακτικά, μπορούμε να δείξουμε ότι } p_X(1) \neq p_{X|Y}(X = 1|Y = 0) &\Leftrightarrow 0.25 \neq \frac{p_{X,Y}(1,0)}{p_Y(0)} \Leftrightarrow \\ 0.25 \neq \frac{0}{p_Y(0)} &\Leftrightarrow 0.25 \neq 0, \text{ που ισχύει.} \end{aligned}$$

Θέμα 3.3

Δύο τυχαίες μεταβλητές X και Y παίρνουν τιμές x και y , αντίστοιχα, στο σύνολο $\{0, 1, 2, 3\}$. Στον πίνακα που ακολουθεί μας δίδεται μερική πληροφορία για την από κοινού συνάρτηση πιθανότητας $p_{X,Y}(x, y)$ και τις περιθωριακές συναρτήσεις πιθανότητας $p_X(x)$ και $p_Y(y)$ των τ.μ. X και Y αντίστοιχα. Επίσης, δίδεται ότι $P(X > 2 \mid Y \text{ είναι περιττός}) = \frac{37}{70}$.

$Y \backslash X$	$x = 0$	$x = 1$	$x = 2$	$x = 3$	$p_Y(y)$
$y = 0$	0.1	0.03	0.07	0.05	0.25
$y = 1$	?	0.1	0	0.2	?
$y = 2$	0.01	?	0	?	0.05
$y = 3$	?	0.01	0.08	?	0.3
$p_X(x)$	0.25	0.15	0.15	?	

(α) Χρησιμοποιώντας την πληροφορία που σας δίδεται, συμπληρώστε τις τιμές που λείπουν από τον πίνακα. Θα πρέπει να περιγράψετε αναλυτικά πώς προέκυψε η κάθε τιμή που υπολογίσατε.

(β) Υπολογίστε την πιθανότητα η τ.μ. X να είναι διάφορη της τ.μ. Y .

(γ) Δεδομένου ότι X άρτιος, ποια είναι η δεσμευμένη πιθανότητα ότι $Y = 2$; Βρείτε, επίσης, τη δεσμευμένη πιθανότητα $P(X \text{ είναι περιττός} \mid Y = 0)$.

(δ) Έστω $Z = 2X + 3Y$. Βρείτε τη μέση τιμή, $E[Z]$, της τ.μ. Z .

(ε) Είναι οι τ.μ. X και Y ανεξάρτητες; Αιτιολογήστε.

Λύση:

(α) Αφού $P(X > 2 \mid Y \text{ είναι περιττός}) = \frac{37}{70}$ ισχύει:

$$\frac{P(X > 2, Y \text{ είναι περιττός})}{P(Y \text{ είναι περιττός})} = \frac{37}{70} \Leftrightarrow \frac{p_{X,Y}(3, 1) + p_{X,Y}(3, 3)}{p_Y(1) + p_Y(3)} = \frac{37}{70} \Leftrightarrow \frac{0.2 + p_{X,Y}(3, 3)}{0.7} = \frac{37}{70} \Leftrightarrow 70 \cdot p_{X,Y}(3, 3) + 14 = 25.9 \Leftrightarrow p_{X,Y}(3, 3) = \frac{11.9}{70} \Leftrightarrow \underline{p_{X,Y}(3, 3) = 0.17}$$

Ακόμη:

$$p_Y(3) = p_{X,Y}(0, 3) + p_{X,Y}(1, 3) + p_{X,Y}(2, 3) + p_{X,Y}(3, 3) \Leftrightarrow 0.3 = p_{X,Y}(0, 3) + 0.01 + 0.08 + 0.17 \Leftrightarrow \underline{p_{X,Y}(0, 3) = 0.04}$$

$$p_X(0) = p_{X,Y}(0, 0) + p_{X,Y}(0, 1) + p_{X,Y}(0, 2) + p_{X,Y}(0, 3) \Leftrightarrow 0.25 = 0.1 + p_{X,Y}(0, 1) + 0.01 + 0.04 \Leftrightarrow \underline{p_{X,Y}(0, 1) = 0.1}$$

Με αντίστοιχο τρόπο προκύπτουν και οι υπόλοιπες τιμές που φαίνονται στον πίνακα.

$Y \backslash X$	$x = 0$	$x = 1$	$x = 2$	$x = 3$	$p_Y(y)$
$y = 0$	0.1	0.03	0.07	0.05	0.25
$y = 1$	0.1	0.1	0	0.2	0.4
$y = 2$	0.01	0.01	0	0.03	0.05
$y = 3$	0.04	0.01	0.08	0.17	0.3
$p_X(x)$	0.25	0.15	0.15	0.45	

$$\textbf{(β)} P(X \neq Y) = 1 - P(X = Y) = 1 - p_{X,Y}(0,0) - p_{X,Y}(1,1) - p_{X,Y}(2,2) - p_{X,Y}(3,3) = 1 - 0.1 - 0.1 - 0 - 0.17 = 0.63.$$

$$\begin{aligned} \textbf{(γ)} P(Y = 2 \mid X \text{ είναι άρτιος}) &= \frac{P(X \text{ είναι άρτιος}, Y = 2)}{P(X \text{ είναι άρτιος})} = \frac{p_{X,Y}(0,2) + p_{X,Y}(2,2)}{p_X(0) + p_X(2)} \\ &= \frac{0.01 + 0}{0.25 + 0.05} = \frac{1}{30}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X \text{ είναι περιττός} \mid Y = 0) &= \frac{P(X \text{ είναι περιττός}, Y = 0)}{p_Y(0)} = \frac{p_{X,Y}(1,0) + p_{X,Y}(3,0)}{0.25} = \frac{0.03 + 0.05}{0.25} = \\ \frac{0.08}{0.25} &= \frac{8}{25}. \end{aligned}$$

$$\textbf{(δ)} E[Z] = E[2X + 3Y] = 2E[X] + 3E[Y] = 2 \cdot (0 \cdot 0.25 + 1 \cdot 0.15 + 2 \cdot 0.15 + 3 \cdot 0.45) + 3 \cdot (0 \cdot 0.25 + 1 \cdot 0.4 + 2 \cdot 0.05 + 3 \cdot 0.3) = 2 \cdot 1.8 + 3 \cdot 1.4 = 7.8.$$

(ε) Δεδομένης της γνώσης ότι $X = 2$, γνωρίζουμε ότι η Y δεν μπορεί να πάρει τις τιμές 1 και 2. Αυτό συνεπάγεται σχέση εξάρτησης ανάμεσα στις X και Y και επομένως δεν είναι ανεξάρτητες. Εναλλακτικά, μπορούμε να δείξουμε ότι $p_Y(1) \neq p_{Y|X}(Y = 1|X = 2) \Leftrightarrow 0.4 \neq \frac{p_{X,Y}(2,1)}{p_X(2)} \Leftrightarrow 0.4 \neq \frac{0}{p_X(2)} \Leftrightarrow 0.4 \neq 0$, που ισχύει.

Θέμα 3.4

Δύο τυχαίες μεταβλητές X και Y παίρνουν τιμές x και y , αντίστοιχα, στο σύνολο $\{0, 1, 2, 3\}$. Στον πίνακα που ακολουθεί μας δίδεται μερική πληροφορία για την από κοινού συνάρτηση πιθανότητας $p_{X,Y}(x, y)$ και τις περιθωριακές συναρτήσεις πιθανότητας $p_X(x)$ και $p_Y(y)$ των τ.μ. X και Y αντίστοιχα. Επίσης, δίδεται ότι $P(X = Y + 1) = 0.05$, για έγκυρες τιμές των X, Y .

$Y \backslash X$	$x = 0$	$x = 1$	$x = 2$	$x = 3$	$p_Y(y)$
$y = 0$	0.2	0.01	0	0.04	0.25
$y = 1$	0.05	?	0	0.15	?
$y = 2$	0.05	?	0.01	?	0.15
$y = 3$	?	0.15	0.15	?	0.35
$p_X(x)$	0.3	0.26	0.16	?	

(α) Χρησιμοποιώντας την πληροφορία που σας δίδεται, συμπληρώστε τις τιμές που λείπουν από τον πίνακα. Θα πρέπει να περιγράψετε αναλυτικά πώς προέκυψε η κάθε τιμή που υπολογίσατε.

(β) Υπολογίστε την πιθανότητα η τ.μ. X να παίρνει τιμές ίσες με την τ.μ. $3 - Y$.

(γ) Δεδομένου ότι $Y = 1$, ποια είναι η δεσμευμένη πιθανότητα ότι $X = Y$; Βρείτε, επίσης, τη δεσμευμένη πιθανότητα $P(X \text{ είναι περιττός} \mid Y \text{ είναι περιττός})$.

(δ) Έστω $Z = Y^2 - 9Y - X$. Βρείτε τη μέση τιμή, $E[Z]$, της τ.μ. Z .

(ε) Είναι οι τ.μ. X και Y ανεξάρτητες; Αιτιολογήστε.

Λύση:

(α) Δεδομένου ότι $P(X = Y + 1) = 0.05$ ισχύει:

$$p_{X,Y}(1, 0) + p_{X,Y}(2, 1) + p_{X,Y}(3, 2) = 0.05 \Leftrightarrow 0.01 + 0 + p_{X,Y}(3, 2) = 0.05 \Leftrightarrow \underline{p_{X,Y}(3, 2) = 0.04}$$

Ακόμη:

$$p_Y(2) = p_{X,Y}(0, 2) + p_{X,Y}(1, 2) + p_{X,Y}(2, 2) + p_{X,Y}(3, 2) \Leftrightarrow 0.15 = 0.05 + p_{X,Y}(1, 2) + 0.01 + 0.04 \Leftrightarrow \underline{p_{X,Y}(1, 2) = 0.05}$$

$$p_X(0) = p_{X,Y}(0, 0) + p_{X,Y}(0, 1) + p_{X,Y}(0, 2) + p_{X,Y}(0, 3) \Leftrightarrow 0.3 = 0.2 + 0.05 + 0.05 + p_{X,Y}(0, 3) \Leftrightarrow \underline{p_{X,Y}(0, 3) = 0}$$

Με αντίστοιχο τρόπο προκύπτουν και οι υπόλοιπες τιμές:

$Y \backslash X$	$x = 0$	$x = 1$	$x = 2$	$x = 3$	$p_Y(y)$
$y = 0$	0.2	0.01	0	0.04	0.25
$y = 1$	0.05	0.05	0	0.15	0.25
$y = 2$	0.05	0.05	0.01	0.04	0.15
$y = 3$	0	0.15	0.15	0.05	0.35
$p_X(x)$	0.3	0.26	0.16	0.28	

(β) $P(X = 3 - Y) = p_{X,Y}(3, 0) + p_{X,Y}(2, 1) + p_{X,Y}(1, 2) + p_{X,Y}(0, 3) = 0.04 + 0 + 0.05 + 0 = 0.09$.

$$(γ) P(X = Y | Y = 1) = \frac{P(X = 1, Y = 1)}{P(Y = 1)} = \frac{0.05}{0.25} = \frac{1}{5}.$$

$$\begin{aligned} P(X \text{ είναι περιττός} \mid Y \text{ είναι περιττός}) &= \frac{P(X \text{ είναι περιττός}, Y \text{ είναι περιττός})}{P(Y \text{ είναι περιττός})} = \\ &= \frac{p_{X,Y}(1,1) + p_{X,Y}(1,3) + p_{X,Y}(3,1) + p_{X,Y}(3,3)}{p_Y(1) + p_Y(3)} = \frac{0.05 + 0.15 + 0.15 + 0.05}{0.25 + 0.35} = \frac{0.40}{0.60} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

$$(δ) E[Z] = E[Y^2 - 9Y - X] = E[Y^2] - 9 \cdot E[Y] - E[X] = (0^2 \cdot 0.25 + 1^2 \cdot 0.25 + 2^2 \cdot 0.15 + 3^2 \cdot 0.35) - 9 \cdot (0 \cdot 0.25 + 1 \cdot 0.25 + 2 \cdot 0.15 + 3 \cdot 0.35) - (0 \cdot 0.3 + 1 \cdot 0.26 + 2 \cdot 0.16 + 3 \cdot 0.28) = (0 + 0.25 + 0.6 + 3.15) - 9 \cdot (0 + 0.25 + 0.3 + 1.05) - (0 + 0.26 + 0.32 + 0.84) = 4 - 14.4 - 1.42 = -11.82.$$

(ε) Δεδομένης της γνώσης ότι $X = 2$, γνωρίζουμε ότι η Y δεν μπορεί να πάρει τις τιμές 0 και 1. Αυτό συνεπάγεται σχέση εξάρτησης ανάμεσα στις X και Y και επομένως δεν είναι ανεξάρτητες.

Εναλλακτικά, μπορούμε να δείξουμε ότι $p_Y(1) \neq p_{Y|X}(Y = 1 | X = 2) \Leftrightarrow 0.25 \neq \frac{p_{X,Y}(2,1)}{p_X(2)} \Leftrightarrow$

$$0.25 \neq \frac{0}{p_X(2)} \Leftrightarrow 0.25 \neq 0, \text{ που ισχύει.}$$

Θέμα 3.5

Δύο τυχαίες μεταβλητές X και Y παίρνουν τιμές x και y , αντίστοιχα, στο σύνολο $\{0, 1, 2, 3\}$. Στον πίνακα που ακολουθεί μας δίδεται μερική πληροφορία για την από κοινού συνάρτηση πιθανότητας $p_{X,Y}(x, y)$ και τις περιθωριακές συναρτήσεις πιθανότητας $p_X(x)$ και $p_Y(y)$ των τ.μ. X και Y αντίστοιχα. Επίσης, δίδεται ότι $P(X = 3|Y = 3) = 0.125$.

$Y \backslash X$	$x = 0$	$x = 1$	$x = 2$	$x = 3$	$p_Y(y)$
$y = 0$	0.01	0	0.09	0	0.1
$y = 1$	?	0.05	0.05	0	?
$y = 2$	0.04	?	0.06	?	0.3
$y = 3$	?	0.1	0.05	?	0.4
$p_X(x)$	0.35	0.2	0.25	?	

(α) Χρησιμοποιώντας την πληροφορία που σας δίδεται, συμπληρώστε τις τιμές που λείπουν από τον πίνακα. Θα πρέπει να περιγράψετε αναλυτικά πώς προέκυψε η κάθε τιμή που υπολογίσατε.

(β) Υπολογίστε την πιθανότητα η τ.μ. X να παίρνει τιμές όχι μικρότερες από την τ.μ. Y .

(γ) Δεδομένου ότι $X = 2$, ποια είναι η δεσμευμένη πιθανότητα ότι $Y = 0$; Βρείτε, επίσης, τη δεσμευμένη πιθανότητα $P(X \text{ είναι περιττός} | Y \text{ είναι ζυγός})$.

(δ) Έστω $Z = Y + X^3$. Βρείτε τη μέση τιμή, $E[Z]$, της τ.μ. Z .

(ε) Είναι οι τ.μ. X και Y ανεξάρτητες; Αιτιολογήστε.

Λύση:

(α) Αφού $P(X = 3|Y = 3) = 0.125$ ισχύει:

$$\frac{P(X = 3, Y = 3)}{P(Y = 3)} = 0.125 \Leftrightarrow P(X = 3, Y = 3) = 0.125 \cdot 0.4 \Leftrightarrow \underline{p_{X,Y}(3, 3) = 0.05}$$

Ακόμη:

$$p_Y(3) = p_{X,Y}(0, 3) + p_{X,Y}(1, 3) + p_{X,Y}(2, 3) + p_{X,Y}(3, 3) \Leftrightarrow 0.4 = p_{X,Y}(0, 3) + 0.1 + 0.05 + 0.05 \Leftrightarrow \underline{p_{X,Y}(0, 3) = 0.2}$$

$$p_X(0) = p_{X,Y}(0, 0) + p_{X,Y}(0, 1) + p_{X,Y}(0, 2) + p_{X,Y}(0, 3) \Leftrightarrow 0.35 = 0.01 + p_{X,Y}(0, 1) + 0.04 + 0.2 \Leftrightarrow \underline{p_{X,Y}(0, 1) = 0.1}$$

Με αντίστοιχο τρόπο προκύπτουν και οι υπόλοιπες τιμές:

$Y \backslash X$	$x = 0$	$x = 1$	$x = 2$	$x = 3$	$p_Y(y)$
$y = 0$	0.01	0	0.09	0	0.1
$y = 1$	0.1	0.05	0.05	0	0.2
$y = 2$	0.04	0.05	0.06	0.15	0.3
$y = 3$	0.2	0.1	0.05	0.05	0.4
$p_X(x)$	0.35	0.2	0.25	0.2	

(β) $P(X \geq Y) = p_{X,Y}(0, 0) + p_{X,Y}(1, 0) + p_{X,Y}(2, 0) + p_{X,Y}(3, 0) + p_{X,Y}(1, 1) + p_{X,Y}(2, 1) + p_{X,Y}(3, 1) + p_{X,Y}(2, 2) + p_{X,Y}(3, 2) + p_{X,Y}(3, 3) = 0.01 + 0 + 0.09 + 0 + 0.05 + 0.05 + 0 + 0.06 +$

$$0.15 + 0.05 = 0.46.$$

$$(γ) P(Y = 0|X = 2) = \frac{P(X = 2, Y = 0)}{P(X = 2)} = \frac{0.09}{0.25} = \frac{9}{25}.$$

$$\begin{aligned} P(X \text{ είναι περιττός} \mid Y \text{ είναι ζυγός}) &= \frac{P(X \text{ είναι περιττός}, Y \text{ είναι ζυγός})}{P(Y \text{ είναι ζυγός})} = \\ &= \frac{p_{X,Y}(1, 0) + p_{X,Y}(1, 2) + p_{X,Y}(3, 0) + p_{X,Y}(3, 2)}{p_Y(0) + p_Y(2)} = \frac{0 + 0.05 + 0 + 0.15}{0.1 + 0.3} = \frac{0.2}{0.4} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$(δ) E[Z] = E[Y + X^3] = E[Y] + E[X^3] = (0 \cdot 0.1 + 1 \cdot 0.2 + 2 \cdot 0.3 + 3 \cdot 0.4) + (0^3 \cdot 0.35 + 1^3 \cdot 0.2 + 2^3 \cdot 0.25 + 3^3 \cdot 0.2) = (0 + 0.2 + 0.6 + 1.2) + (0 + 0.2 + 2 + 5.4) = 2 + 7.6 = 9.6.$$

(ε) Δεδομένης της γνώσης ότι $X = 3$, γνωρίζουμε ότι η Y δεν μπορεί να πάρει τις τιμές 0 και 1. Αυτό συνεπάγεται σχέση εξάρτησης ανάμεσα στις X και Y και επομένως δεν είναι ανεξάρτητες.

Εναλλακτικά, μπορούμε να δείξουμε ότι $p_Y(0) \neq p_{Y|X}(Y = 0|X = 3) \Leftrightarrow 0.1 \neq \frac{p_{X,Y}(3, 0)}{p_X(3)} \Leftrightarrow$

$$0.1 \neq \frac{0}{p_X(3)} \Leftrightarrow 0.1 \neq 0, \text{ που ισχύει.}$$