

Πανεπιστήμιο Κρήτης - Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών
ΗΥ-217 - Θεωρία Πιθανοτήτων 2020
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης
14 Νοεμβρίου 2020 - Διάρκεια: 1.5 Ώρες
Θέμα 2

Θέμα 2.1

Ένας φοιτητής του Τμήματος Επιστήμης Υπολογιστών ολοκληρώνει επιτυχώς τις σπουδές του, και κατατάσσεται για να υπηρετήσει στον Ελληνικό Στρατό. Επειδή τις πρώτες μέρες φαίνεται αρκετά "ανήσυχος" μέσα στο στρατόπεδο, ο λοχαγός του αποφασίζει να τον ηρεμήσει με πρωινή γυμναστική. Πιο συγκεκριμένα, ο φαντάρος (πλέον) βρίσκεται στη μέση του γηπέδου της μονάδας του, κοιτώντας προς τη μία εστία. Ο λοχαγός διατάζει τον φαντάρο να αρχίζει να κινείται κατά μήκος του γηπέδου (προς τα μπροστά ή προς τα πίσω σε ευθεία, και όχι διαγώνια) πραγματοποιώντας 1 βήμα κάθε δευτερόλεπτο. Σε κάθε του βήμα μετακινείται μπροστά κατά 1 μέτρο με πιθανότητα 80% και πίσω κατά 1 μέτρο με πιθανότητα 20%, ανεξάρτητα μεταξύ των βημάτων.

- (i) Έστω X η τ.μ. που αντιπροσωπεύει το πλήθος των βημάτων *προς τα μπροστά* που μετακινείται ο φαντάρος σε διάστημα 10 δευτερολέπτων. Να υπολογίσετε τη συνάρτηση πιθανότητας της τ.μ. X , $p_X(x)$, τη μέση τιμή $E[X]$ και τη διασπορά $var(X)$.
- (ii) Έστω Y η τ.μ. που αντιπροσωπεύει τη θέση του φαντάρου μέσα στο γήπεδο (σε μέτρα) μετά από 10 δευτερόλεπτα. Να υπολογίσετε την συνάρτηση πιθανότητας της τ.μ. Y , τη μέση τιμή $E[Y]$ και τη διασπορά $var(Y)$.

Λύση:

- (i) Με βάση την εκφώνηση της άσκησης, καταλαβαίνουμε ότι η τ.μ. X ακολουθεί Διωνυμική κατανομή, με παραμέτρους $(10, 0.8)$. Ως εκ τούτου, η συνάρτηση πιθανότητας αυτής θα δίνεται από τον εξής τύπο:

$$p_X(k) = \binom{10}{k} (0.8)^k (0.2)^{10-k}, k = 0, 1, 2, \dots, 10.$$

Με βάση τη θεωρία, γνωρίζουμε ότι για τη Διωνυμική κατανομή ισχύουν:

- $E[X] = np = 10 \cdot 0.8 = 8$
- $var(X) = np(1 - p) = 10 \cdot 0.8 \cdot 0.2 = 1.6$

- (ii) Σε 10 δευτερόλεπτα ο φαντάρος κινείται X βήματα (και αντίστοιχα μέτρα) προς τα μπροστά, και άρα $10 - X$ βήματα (και αντίστοιχα μέτρα) προς τα πίσω. Άρα, για την τ.μ. Y , έχουμε:

$$Y = X - (10 - X) = 2X - 10$$

Όταν η τ.μ. X παίρνει τις τιμές $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, η τ.μ. Y παίρνει τις τιμές $\{-10, -8, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8, 10\}$ αντίστοιχα. Οι πιθανότητες με τις οποίες γίνεται αυτό και άρα η $p_Y(k)$ είναι:

$$P(Y = 2k - 10) = P(X = k) = \binom{10}{k} (0.8)^k (0.2)^{10-k}, k = 0, 1, 2, \dots, 10.$$

Για τη μέση τιμή και τη διασπορά της τ.μ. Y , έχουμε:

- $E[Y] = E[2X - 10] = 2E[X] - 10 = 2 \cdot 8 - 10 = 16 - 10 = 6$
- $var(X) = var(2X - 10) = 4var(X) = 4 \cdot 1.6 = 6.4$

Θέμα 2.2

Ο Νίκος είναι φοιτητής του Τμήματος Επιστήμης Υπολογιστών. Στον ελεύθερό του χρόνο, ασχολείται ερασιτεχνικά με το μπάσκετ με τη βοήθεια του Γιώργου που είναι φοιτητής ΤΕΦΑΑ. Καθώς ο χρόνος μελέτης για τη σχολή είναι μεγάλος, ο Νίκος δεν προπονείται αρκετά στο μπάσκετ, με αποτέλεσμα το ποσοστό ευστοχίας του στις ελεύθερες βολές να είναι 20%. Ο Γιώργος, επιθυμώντας να δει την πρόοδο του φίλου του, προκαλεί τον Νίκο να εκτελέσει 15 συνεχόμενες ελεύθερες βολές.

Έστω $X_i = 1$ αν ο Νίκος ευστοχήσει στην ελεύθερη βολή i , και $X_i = 0$ αν ο Νίκος άστοχήσει στην ελεύθερη βολή i . Υποθέτουμε ανεξαρτησία των τ.μ. X_i . Έστω Y το πλήθος των εύστοχων ελεύθερων βολών του Νίκου.

- (i) Να υπολογίσετε τη δεσμευμένη πιθανότητα $P(Y = 4 \mid X_1 = 1, X_{15} = 0)$.
- (ii) Προκειμένου ο Γιώργος να παρακινήσει περισσότερο τον Νίκο, αποφασίζει να του δίνει 2 ευρώ για κάθε εύστοχη ελεύθερη βολή. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διασπορά του συνολικού κέρδους του Νίκου.
- (iii) Βασιζόμενος στην παραπάνω λογική, αλλά επιθυμώντας να δει τις γνώσεις του φίλου του στο ΗΥ-217, ο Γιώργος προσανατολίζεται να συνεχίσει να δίνει 2 ευρώ στον Νίκο για κάθε εύστοχη ελεύθερη βολή, αλλά ταυτόχρονα να του παίρνει 1 ευρώ για κάθε άστοχη ελεύθερη βολή. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διασπορά του συνολικού κέρδους του Νίκου.

Λύση:

Με βάση την εκφώνηση της άσκησης, καταλαβαίνουμε ότι η τ.μ. Y ακολουθεί Διωνυμική κατανομή, με παραμέτρους $(15, 0.2)$. Ως εκ τούτου, η συνάρτηση πιθανότητας αυτής θα δίνεται από τον εξής τύπο:

$$p_Y(k) = \binom{15}{k} (0.2)^k (0.8)^{15-k}, k = 0, 1, 2, \dots, 15.$$

- (i) Δεδομένου ότι ο Νίκος είναι εύστοχος στην 1-η ελεύθερη βολή ($X_1 = 1$) και άστοχος στην τελευταία ($X_{15} = 0$), το γεγονός να ευστοχήσει συνολικά σε 4 ελεύθερες βολές είναι ισοδύναμο με το να ευστοχήσει σε 3 από τις ελεύθερες βολές υπ' αριθμών 2 ως 14. Η πιθανότητα αυτή είναι ίση με:

$$P(Y = 4 \mid X_1 = 1, X_{15} = 0) = \binom{13}{3} (0.2)^3 (0.8)^{10} = 0.24567$$

- (ii) Με βάση τη θεωρία, γνωρίζουμε ότι για τη Διωνυμική κατανομή ισχύουν:

- $E[Y] = np = 15 \cdot 0.2 = 3$
- $\text{var}(Y) = np(1 - p) = 15 \cdot 0.2 \cdot 0.8 = 2.4$

Έστω τ.μ. Z που αντιπροσωπεύει το κέρδος του Νίκου. Αφού ο Νίκος λαμβάνει 2 ευρώ για κάθε εύστοχη βολή, ισχύει ότι: $Z = 2Y$. Άρα, για τη μέση τιμή και τη διασπορά της τ.μ. Z , έχουμε:

- $E[Z] = E[2Y] = 2E[Y] = 2 \cdot 3 = 6$
- $\text{var}(Z) = \text{var}(2Y) = 4\text{var}(Y) = 4 \cdot 2.4 = 9.6$

- (iii) Έστω τ.μ. W που αντιπροσωπεύει το κέρδος του Νίκου. Αφού ο Νίκος λαμβάνει 2 ευρώ για κάθε εύστοχη βολή, και χάνει 1 ευρώ για κάθε άστοχη βολή, ισχύει ότι: $Z = 2Y - (15 - Y) = 3Y - 15$. Άρα, για τη μέση τιμή και τη διασπορά της τ.μ. W , έχουμε:

- $E[W] = E[3Y - 15] = 3E[Y] - 15 = 3 \cdot 3 - 15 = 9 - 15 = -6$
- $\text{var}(W) = \text{var}(3Y - 15) = 9\text{var}(Y) = 9 \cdot 2.4 = 21.6$

Θέμα 2.3

Η ομάδα ποδοσφαίρου του Τμήματος Επιστήμης Υπολογιστών έχει προκριθεί στον τελικό του Πανεπιστημιακού Πρωταθλήματος Ποδοσφαίρου. Ο Πάνος είναι ο σπεσιαλίστας της ομάδας στις εκτελέσεις foul, και ως εκ τούτου σουτάρει foul εντατικά κατά τη διάρκεια της προπόνησης. Ο Πάνος ξεκινάει να εκτελεί foul από το μέσο της απόστασης μεταξύ σέντρας και μεγάλης περιοχής, όπου θεωρείται και το σημείο "0" (οι επιμέρους σχετικές αποστάσεις δεν αφορούν), και κινείται αποκλειστικά ευθεία προς την εστία (όχι διαγώνια). Για κάθε εύστοχο χτύπημα foul ο Πάνος μετακινείται μπροστά κατά $2m$, ενώ για κάθε άστοχο μετακινείται πίσω κατά $1m$. Το ποσοστό ευστοχίας του Πάνου στις εκτελέσεις foul ανέρχεται στο 75% (ανεξάρτητα της θέσης που βρίσκεται στο γήπεδο!).

- (i) Έστω X η τ.μ. που αντιπροσωπεύει το πλήθος των χτυπημάτων foul στα οποία ευστοχεί ο Πάνος σε 7 προσπάθειες. Να υπολογίσετε την συνάρτηση πιθανότητας της τ.μ. X , $p_X(x)$, τη μέση τιμή $E[X]$ και τη διασπορά $var(X)$.
- (ii) Έστω Y η τ.μ. που αντιπροσωπεύει τη θέση (σε μέτρα) του Πάνου κατά μήκος της ευθείας εκτέλεσης των foul μετά από 7 προσπάθειες. Να υπολογίσετε την συνάρτηση πιθανότητας της τ.μ. Y , τη μέση τιμή $E[Y]$ και τη διασπορά $var(Y)$.

Λύση:

- (i) Με βάση την εκφώνηση της άσκησης, καταλαβαίνουμε ότι η τ.μ. X ακολουθεί Διωνυμική κατανομή, με παραμέτρους $(7, 0.75)$. Ως εκ τούτου, η συνάρτηση πιθανότητας αυτής θα δίνεται από τον εξής τύπο:

$$p_X(k) = \binom{7}{k} (0.75)^k (0.25)^{7-k}, k = 0, 1, 2, \dots, 7.$$

Με βάση τη θεωρία, γνωρίζουμε ότι για τη Διωνυμική κατανομή ισχύουν:

- $E[X] = np = 7 \cdot 0.75 = 5.25$
- $var(X) = np(1 - p) = 7 \cdot 0.75 \cdot 0.25 = 1.3125$

- (ii) Σε 7 προσπάθειες ο Πάνος έχει X εύστοχα χτυπήματα foul (άρα μετακινείται μπροστά κατά απόσταση $2X$), και άρα $7 - X$ άστοχα (άρα μετακινείται πίσω κατά απόσταση $7 - X$). Άρα, για την τ.μ. Y , έχουμε:

$$Y = 2X - (7 - X) = 3X - 7$$

Όταν η τ.μ. X παίρνει τις τιμές $\{0, 1, 2, \dots, 7\}$, η τ.μ. Y παίρνει τις τιμές $\{-7, -4, -1, \dots, 8, 11, 14\}$ αντίστοιχα. Οι πιθανότητες με τις οποίες γίνεται αυτό και άρα η $p_Y(k)$ είναι:

$$P(Y = 3k - 7) = P(X = k) = \binom{7}{k} (0.75)^k (0.25)^{7-k}, k = 0, 1, 2, \dots, 7.$$

Για τη μέση τιμή και τη διασπορά της τ.μ. Y , έχουμε:

- $E[Y] = E[3X - 7] = 3E[X] - 7 = 3 \cdot 5.25 - 7 = 15.75 - 7 = 8.75$
- $var(Y) = var(3X - 7) = 9var(X) = 9 \cdot 1.3125 = 11.8125$

Θέμα 2.4

Ο Γιώργος υπηρετεί τη θητεία του στην παραμεθόριο, όντας παράλληλα φοιτητής του Τμήματος Επιστήμης Υπολογιστών. Ο Γιώργος “χρωστάει” μόνο το HY-217 για να πάρει το πτυχίο του, και στην πρωινή αναφορά ζητάει από τον Διοικητή του να του δώσει (τιμητική) άδεια ώστε να προλάβει να παραστεί στην τελική εξέταση του HY-217. Μέχρι την ημέρα της εξέτασης απομένουν 2 εβδομάδες (14 ημέρες), και οι άδειες των στρατιωτών είναι συνεχόμενες (δηλαδή ξεκινούν υποχρεωτικά από την 1-η εκ των 14 ημερών που απομένουν).

Ο Διοικητής εξετάζει το αίτημα του Γιώργου, και αποφασίζει ότι αυτό θα εξαρτηθεί από την επίδοσή του σε 20 βολές έναντι στόχου. Ο Γιώργος έχει ποσοστό ευστοχίας $\frac{3}{8}$, ανεξάρτητα μεταξύ των βολών. Έστω Y το πλήθος των εύστοχων βολών του Γιώργου, και $X_i = 1$ αν ο Γιώργος ευστοχήσει στη βολή i , ενώ $X_i = 0$ αν ο Γιώργος αστοχήσει στη βολή i .

- (i) Να υπολογίσετε τη δεσμευμένη πιθανότητα $P(Y = 8 \mid X_1 = 1, X_{20} = 0)$.
- (ii) Ο Διοικητής, κατανοώντας την επιθυμία του Γιώργου να εξεταστεί στο HY-217, αποφασίζει να του δίνει 2 μέρες (τιμητική) άδεια για κάθε εύστοχη βολή. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διασπορά του συνολικού αριθμού των ημερών (τιμητικής) άδειας του Γιώργου. Θα του φτάσουν **(κατά μέσο όρο)** ώστε να παραστεί στην τελική εξέταση του HY-217;
- (iii) Βασιζόμενος στην παραπάνω λογική, αλλά επιθυμώντας να δει τις γνώσεις του Γιώργου στο HY-217, ο Διοικητής ζητάει από τον Γιώργο να επιλέξει μεταξύ 2 εναλλακτικών: Είτε οι μέρες (τιμητικής) άδειας που θα λάβει θα προσδιοριστούν με βάση τη λογική του προηγούμενου ερωτήματος είτε προσανατολίζεται να του δίνει 3 μέρες (τιμητική) άδεια για κάθε εύστοχη βολή, αλλά ταυτόχρονα να του δίνει και 1 μέρα φυλακή για κάθε άστοχη βολή. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διασπορά του αριθμού των ημερών (τιμητικής) άδειας του Γιώργου στην 2-η περίπτωση. Θα του φτάσουν **(κατά μέσο όρο)** ώστε να παραστεί στην τελική εξέταση του HY-217; Ποια από τις 2 εναλλακτικές είναι συμφερότερη **(κατά μέσο όρο)** για τον ίδιο;

Λύση:

Με βάση την εκφώνηση της άσκησης, καταλαβαίνουμε ότι η τ.μ. Y ακολουθεί Διωνυμική κατανομή, με παραμέτρους $(20, \frac{3}{8})$. Ως εκ τούτου, η συνάρτηση πιθανότητας αυτής θα δίνεται από τον εξής τύπο:

$$p_X(k) = \binom{20}{k} \left(\frac{3}{8}\right)^k \left(\frac{5}{8}\right)^{20-k}, k = 0, 1, 2, \dots, 20.$$

- (i) Δεδομένου ότι ο Γιώργος είναι εύστοχος στην 1-η βολή ($X_1 = 1$) και άστοχος στην τελευταία ($X_{20} = 0$), το γεγονός να ευστοχήσει συνολικά σε 8 βολές είναι ισοδύναμο με το να ευστοχήσει σε 7 από τις ελεύθερες βολές υπ' αριθμών 2 ως 19. Η πιθανότητα αυτή είναι ίση με:

$$P(Y = 8 \mid X_1 = 1, X_{20} = 0) = \binom{18}{7} \left(\frac{3}{8}\right)^7 \left(\frac{5}{8}\right)^{11} = 0.18865$$

- (ii) Με βάση τη θεωρία, γνωρίζουμε ότι για τη Διωνυμική Κατανομή ισχύουν:

- $E[Y] = np = 20 \cdot \frac{3}{8} = 7.5$
- $var(Y) = np(1 - p) = 20 \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{8} = 4.6875$

Έστω τ.μ. Z που αντιπροσωπεύει τις μέρες (τιμητικής) άδειας του Γιώργου. Αφού ο Γιώργος λαμβάνει 2 μέρες (τιμητικής) άδειας για κάθε εύστοχη βολή, ισχύει ότι: $Z = 2Y$. Άρα, για τη μέση τιμή και τη διασπορά της τ.μ. Z , έχουμε:

- $E[Z] = E[2Y] = 2E[Y] = 2 \cdot 7.5 = 15$
- $var(Z) = var(2Y) = 4var(Y) = 4 \cdot 4.6875 = 18.75$

Δεδομένου ότι απομένουν 2 εβδομάδες (14 ημέρες) μέχρι την τελική εξέταση του HY-217, οι μέρες άδειας επαρκούν **κατά μέσο όρο** στον Γιώργο για να προλάβει την εξέταση.

- (iii) Έστω τ.μ. W που αντιπροσωπεύει τις μέρες (τιμητικής) άδειας του Γιώργου. Αφού ο Γιώργος λαμβάνει 3 μέρες (τιμητικής) άδειας για κάθε εύστοχη βολή, και λαβάνει 1 μέρα φυλακή για κάθε άστοχη βολή, ισχύει ότι: $Z = 3Y - (20 - Y) = 4Y - 20$. Άρα, για τη μέση τιμή και τη διασπορά της τ.μ. W , έχουμε:

- $E[W] = E[4Y - 20] = 4E[Y] - 20 = 4 \cdot 7.5 - 20 = 30 - 20 = 10$
- $var(W) = var(3Y - 20) = 9var(Y) = 9 \cdot 4.6875 = 21.6$

Δεδομένου ότι απομένουν 2 εβδομάδες (14 ημέρες) μέχρι την τελική εξέταση του HY-217, οι μέρες άδειας δεν επαρκούν **κατά μέσο όρο** στον Γιώργο για να προλάβει την εξέταση. Επιπλέον, δεδομένου ότι είναι $E[Z] > E[W]$, ο Γιώργος θα πρέπει να διαλέξει την 1-η εναλλακτική για τον προσδιορισμό των ημερών άδειας που θα λάβει.

Θέμα 2.5

Ο Σήφης είναι δευτεροετής φοιτητής του Τμήματος Επιστήμης Υπολογιστών, και παρακολουθεί για πρώτη φορά φέτος το HY-217. Με βάση την προετοιμασία του, έχει πιθανότητα να περάσει το μάθημα ίση με $\frac{1}{3}$, ανεξάρτητα μεταξύ των εξεταστικών στις οποίες επιχειρεί να δώσει το μάθημα. Έστω η τ.μ. X που αντιπροσωπεύει τις φορές που ο Σήφης εξετάζεται στο HY-217 μέχρι να το περάσει. Κάθε χρόνο ο Σήφης έχει 2 ευκαιρίες να περάσει το μάθημα, μία στην εξεταστική του Χειμερινού Εξαμήνου και μία στην εξεταστική του Σεπτεμβρίου.

- (i) Να υπολογίσετε την συνάρτηση πιθανότητας της τ.μ. X $p_X(x)$, τη μέση τιμή $E[X]$ και τη διασπορά $var(X)$.
- (ii) Να υπολογίσετε την πιθανότητα ο Σήφης να περάσει το HY-217 στο Χειμερινό Εξάμηνο του 4-ου έτους του στο Τμήμα.
- (iii) Να υπολογίσετε την πιθανότητα ο Σήφης να μην έχει περάσει το HY-217 ξεκινώντας το 5-ο έτος του στο Τμήμα.

Λύση :

- (i) Με βάση την εκφώνηση της άσκησης, καταλαβαίνουμε ότι η τ.μ. X ακολουθεί Γεωμετρική κατανομή, με παράμετρο $p = \frac{1}{3}$. Ως εκ τούτου, η συνάρτηση πιθανότητας αυτής θα δίνεται από τον εξής τύπο:

$$p_X(k) = \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \left(\frac{1}{3}\right), k = 1, 2, \dots$$

Με βάση τη θεωρία, γνωρίζουμε ότι για τη Γεωμετρική κατανομή ισχύουν:

- $E[X] = \frac{1}{p} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$
- $var(X) = \frac{1-p}{p^2} = \frac{1-\frac{1}{3}}{(\frac{1}{3})^2} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{9}} = \frac{18}{3} = 6$

- (ii) Προκειμένου ο Σήφης να περάσει το HY-217 στο Χειμερινό Εξάμηνο του 4-ου έτους του στο Τμήμα, αυτό συνεπάγεται ότι το περνάει στην 5-η του προσπάθεια (αφού σε κάθε έτος από το 2-ο και μετά που ξεκίνησε να παρακολουθεί το μάθημα έχει 2 προσπάθειες). Ως εκ τούτου, στις προηγούμενες 4 φορές (δηλαδή στο 2-ο και στο 3-ο έτος του στο Τμήμα) αποτυγχάνει να το περάσει. Άρα, έχουμε:

$$P(X = 5) = p_X(5) = \left(\frac{2}{3}\right)^4 \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{16}{243} = 0.06584$$

- (iii) Προκειμένου ο Σήφης να μην έχει περάσει το HY-217 ξεκινώντας το 5-ο έτος του στο Τμήμα, αυτό συνεπάγεται ότι έχει εξεταστεί ανεπιτυχώς 6 συνεχόμενες φορές (αφού σε κάθε έτος από το 2-ο και μετά που ξεκίνησε να παρακολουθεί το μάθημα έχει 2 προσπάθειες). Δεδομένου ότι κάθε φορά το αποτέλεσμα της εξέτασης είναι ανεξάρτητο από αυτό των προηγούμενων, έχουμε:

$$P(X > 6) = \left(1 - \frac{1}{3}\right)^6 = \left(\frac{2}{3}\right)^6 = \frac{64}{729} = 0.0877$$