

Πανεπιστήμιο Κρήτης - Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών
ΗΥ-217 - Θεωρία Πιθανοτήτων 2020
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης
14 Νοεμβρίου 2020 - Διάρκεια: 1.5 Ώρες
Θέμα 1

Θέμα 1.1

- (α) Από τους ασθενείς που νοσηλεύονται σε μια κλινική, το 60% έχει καρδιακή ανεπάρκεια, το 50% πνευμονική ανεπάρκεια και το 35% έχει και τα δύο. Βρείτε την πιθανότητα ένας ασθενής να έχει καρδιακή ανεπάρκεια αν ξέρουμε ότι δεν έχει πνευμονική ανεπάρκεια.
- (β) Μια τράπουλα περιέχει συνολικά 52 φύλλα που είναι χωρισμένα σε 4 σύμβολα ($\diamond, \heartsuit, \clubsuit, \spadesuit$) και καθένα από αυτά έχει 13 φύλλα στην σειρά (A-2-3-...-10-J-Q-K). Με πόσους τρόπους μπορεί από μια τράπουλα να σχηματιστεί κέντα, δηλαδή ένα σύνολο από 5 διαδοχικά φύλλα (με οποιαδήποτε από τα 4 σύμβολα, π.χ. $A\diamond - 2\clubsuit - 3\heartsuit - 4\heartsuit - 5\spadesuit$), αν θεωρήσουμε ότι ο άσος μπορεί να "κολλήσει" μόνο ως πρώτο φύλλο χαμηλά (δηλαδή A-2-3-...);
- (γ) Σε ένα κουτί υπάρχουν 5 άσπροι και 10 μαύροι βόλαιο. Διαλέγουμε τυχαία ένα βόλο και τον ξαναβάζουμε στο κουτί μαζί με άλλους δύο του ίδιου χρώματος. Διαλέγουμε πάλι ένα βόλο. Βρείτε την πιθανότητα ο δεύτερος βόλος να είναι άσπρος.

Λύση:

- (α) Ορίζουμε τα ενδεχόμενα: $K = \{\text{ένας ασθενής έχει καρδιακή ανεπάρκεια}\}$ και $\Pi = \{\text{ένας ασθενής έχει πνευμονική ανεπάρκεια}\}$. Άρα, σύμφωνα με την εκφώνηση έχουμε ότι $P(K) = 0.6$, $P(\Pi) = 0.5$ και $P(K \cap \Pi) = 0.35$ και ζητείται η πιθανότητα $P(K | \Pi^c)$. Έχουμε:

$$P(K | \Pi^c) = \frac{P(K \cap \Pi^c)}{P(\Pi^c)} = \frac{P(K) - P(K \cap \Pi)}{1 - P(\Pi)} = \frac{0.6 - 0.35}{1 - 0.5} = 0.5$$

- (β) Έχουμε 9 επιλογές για τον πρώτο αριθμό της κέντας που θα επιλέξουμε, καθώς μπορούμε να επιλέξουμε μόνο κάποιον από τους αριθμούς A-2-3-...-9, καθώς ξεκινώντας από το 10 και μετά δεν μπορούν να σχηματιστούν 5 διαδοχικοί αριθμοί. Για τους υπόλοιπους αριθμούς της κέντας που θα επιλέξουμε υπάρχει μια μόνο επιλογή, ξέροντας τον πρώτο αριθμό, αφού θέλουμε οι αριθμοί να είναι διαδοχικοί. Όμως για κάθε έναν από τους 5 αυτούς αριθμούς υπάρχουν 4 επιλογές, καθώς υπάρχουν 4 σχέδια για κάθε αριθμό. Άρα συνολικά υπάρχουν $9 \cdot 4^4 = 9216$ τρόποι για τον σχηματισμό μιας κέντας σε μια τράπουλα.
- (γ) Ορίζουμε τα ενδεχόμενα: $A_1 = \{\text{ο πρώτος βόλος είναι άσπρος}\}$, $M_1 = \{\text{ο πρώτος βόλος είναι μαύρος}\}$ και $A_2 = \{\text{ο δεύτερος βόλος είναι άσπρος}\}$. Ζητείται η πιθανότητα $P(A_2)$. Εφαρμόζοντας το θεώρημα ολικής πιθανότητας έχουμε:

$$P(A_2) = P(A_2 | A_1)P(A_1) + P(A_2 | M_1)P(M_1) = \frac{7}{17} \cdot \frac{5}{15} + \frac{5}{17} \cdot \frac{10}{15} = \frac{1}{3}$$

Θέμα 1.2

- (α) Από τους ασθενείς που νοσηλεύονται σε μια κλινική, το 60% έχει καρδιακή ανεπάρκεια, το 50% πνευμονική ανεπάρκεια και το 35% έχει και τα δύο. Βρείτε την πιθανότητα ένας ασθενής να έχει καρδιακή ανεπάρκεια αν ξέρουμε ότι δεν έχει και τα δύο προβλήματα.
- (β) Σχηματίζουμε μια συμβολοσειρά 5 γραμμάτων χρησιμοποιώντας γράμματα του ελληνικού αλφαβήτου. Πόσες δυνατότητες υπάρχουν αν η συμβολοσειρά περιέχει το γράμμα α;
- (γ) Σε ένα κουτί υπάρχουν 6 κίτρινες και 4 μπλε κάρτες. Διαλέγουμε τυχαία μια κάρτα και βάζουμε στο κουτί 3 κάρτες του άλλου χρώματος (αλλά όχι αυτή που διαλέξαμε). Διαλέγουμε πάλι μια κάρτα. Βρείτε την πιθανότητα η δεύτερη κάρτα να είναι κίτρινη.

Λύση:

- (α) Ορίζουμε τα ενδεχόμενα: $K = \{\text{ένας ασθενής έχει καρδιακή ανεπάρκεια}\}$ και $\Pi = \{\text{ένας ασθενής έχει πνευμονική ανεπάρκεια}\}$. Άρα, σύμφωνα με την εκφώνηση έχουμε ότι $P(K) = 0.6$, $P(\Pi) = 0.5$ και $P(K \cap \Pi) = 0.35$ και ζητείται η πιθανότητα $P(K | (K \cap \Pi)^c)$. Έχουμε:

$$P(K | (K \cap \Pi)^c) = \frac{P(K \cap (K \cap \Pi)^c)}{P((K \cap \Pi)^c)} = \frac{P(K) - P(K \cap \Pi)}{1 - P(K \cap \Pi)} = \frac{0.6 - 0.35}{1 - 0.35} \approx 0.38$$

- (β) Οι δυνατές συμβολοσειρές 5 γραμμάτων που περιέχουν το γράμμα α είναι ουσιαστικά όλες οι δυνατές συμβολοσειρές οποιονδήποτε γραμμάτων πλην εκείνες που δεν περιέχουν το γράμμα α. Οι δυνατές συμβολοσειρές οποιονδήποτε γραμμάτων είναι 24^5 αφού δεν μας νοιάζει αν τα γράμματα είναι ίδια. Οι συμβολοσειρές που δεν περιέχουν το γράμμα α είναι 23^5 . Άρα συνολικά υπάρχουν $24^5 - 23^5 = 1526281$ δυνατότητες.
- (γ) Ορίζουμε τα ενδεχόμενα: $K_1 = \{\text{η πρώτη κάρτα είναι κίτρινη}\}$, $M_1 = \{\text{η πρώτη κάρτα είναι μπλε}\}$ και $K_2 = \{\text{η δεύτερη κάρτα είναι κίτρινη}\}$. Ζητείται η πιθανότητα $P(K_2)$. Εφαρμόζοντας το θεώρημα ολικής πιθανότητας έχουμε:

$$P(K_2) = P(K_2 | K_1)P(K_1) + P(K_2 | M_1)P(M_1) = \frac{5}{12} \cdot \frac{6}{10} + \frac{9}{12} \cdot \frac{4}{10} = 0.55$$

Θέμα 1.3

- (α) Από τους μαθητές σε ένα σχολείο, στο 40% αρέσει η Φυσική, στο 30% τα μαθηματικά και στο 20% και τα δύο. Βρείτε την πιθανότητα σε έναν μαθητή να μην του αρέσουν ούτε τα μαθηματικά ούτε η Φυσική.
- (β) Μια τράπουλα περιέχει συνολικά 52 φύλλα που είναι χωρισμένα σε 4 σύμβολα, 2 κόκκινα ($\diamond, \heartsuit$) και 2 μαύρα ($\clubsuit, \spadesuit$) και καθένα από αυτά έχει 13 φύλλα στην σειρά (A-2-3-...-10-J-Q-K). Με πόσους τρόπους μπορούμε να σχηματίσουμε 4 συνεχόμενους αριθμούς κόκκινου χρώματος σε μια τράπουλα, αν θεωρήσουμε ότι ο άσος μπορεί να "κολλήσει" μόνο ως πρώτο φύλλο χαμηλά (δηλαδή A-2-3-...);
- (γ) Σε ένα δοχείο υπάρχουν 12 άσπρες και 8 κόκκινες καραμέλες. Διαλέγουμε τυχαία μια καραμέλα και βάζουμε στο δοχείο 2 καραμέλες του ίδιου χρώματος (αλλά όχι αυτή που διαλέξαμε). Διαλέγουμε πάλι μια καραμέλα. Βρείτε την πιθανότητα η δεύτερη καραμέλα να είναι κόκκινη.

Λύση :

- (α) Ορίζουμε τα ενδεχόμενα: $\Phi = \{\text{σε ένα μαθητή αρέσει η Φυσική}\}$ και $M = \{\text{σε ένα μαθητή αρέσουν τα μαθηματικά}\}$. Άρα, σύμφωνα με την εκφώνηση έχουμε ότι $P(\Phi) = 0.4$, $P(M) = 0.3$ και $P(\Phi \cap M) = 0.2$ και ζητείται η πιθανότητα $P(M^c \cap \Phi^c)$. Έχουμε:

$$P(M^c \cap \Phi^c) = P((M \cup \Phi)^c) = 1 - P(M \cup \Phi) = 1 - P(M) - P(\Phi) + P(M \cap \Phi) = 1 - 0.3 - 0.4 + 0.2 = 0.5$$

- (β) Έχουμε 10 επιλογές για την επιλογή του πρώτου αριθμού, καθώς μπορούμε να επιλέξουμε μόνο κάποιον από τους αριθμούς A-2-3-...-10, καθώς ξεκινώντας από το J και μετά δεν μπορούν να σχηματιστούν 4 διαδοχικοί αριθμοί. Για τους υπόλοιπους αριθμούς που θα επιλέξουμε υπάρχει μια μόνο επιλογή, ξέροντας τον πρώτο αριθμό, αφού θέλουμε οι αριθμοί να είναι διαδοχικοί. Όμως για κάθε έναν από τους 4 αυτούς αριθμούς υπάρχουν 2 επιλογές, καθώς υπάρχουν 2 κόκκινα σχέδια για κάθε αριθμό. Άρα συνολικά υπάρχουν $10 \cdot 2^4 = 160$ τρόποι για τον σχηματισμό 4 συνεχόμενων αριθμών κόκκινου χρώματος σε μια τράπουλα.
- (γ) Ορίζουμε τα ενδεχόμενα: $K_1 = \{\text{η πρώτη καραμέλα είναι κόκκινη}\}$, $A_1 = \{\text{η πρώτη καραμέλα είναι άσπρη}\}$ και $K_2 = \{\text{η δεύτερη καραμέλα είναι κόκκινη}\}$. Ζητείται η πιθανότητα $P(K_2)$. Εφαρμόζοντας το θεώρημα ολικής πιθανότητας έχουμε:

$$P(K_2) = P(K_2 | A_1)P(A_1) + P(K_2 | K_1)P(K_1) = \frac{8}{21} \cdot \frac{12}{20} + \frac{9}{21} \cdot \frac{8}{20} = 0.4$$

Θέμα 1.4

- (α) Έστω ότι μια γυναίκα παρουσιάζει καρκίνο του μαστού με πιθανότητα 0.02. Η μαστογραφία μιας γυναίκας που έχει καρκίνο στο μαστό είναι θετική με πιθανότητα 0.85, ενώ μιας γυναίκας που δεν έχει, είναι θετική με πιθανότητα 0.05. Ποια η πιθανότητα η μαστογραφία μιας γυναίκας να είναι θετική;
- (β) Μια τράπουλα περιέχει συνολικά 52 φύλλα που είναι χωρισμένα σε 4 σύμβολα (σπαθί, μπαστούνι, κούπα, καρώ) και καθένα από αυτά έχει 13 φύλλα στην σειρά (A-2-3-...-10-J-Q-K). Επιλέγουμε 13 χαρτιά. Βρείτε την πιθανότητα 5 από αυτά να είναι σπαθιά, 4 μπαστούνια, 3 κούπες και 1 καρώ.
- (γ) Σε ένα κουτί υπάρχουν 6 άσπροι και 8 μαύροι βόλαιο. Διαλέγουμε τυχαία ένα βόλο και τον ξαναβάζουμε στο κουτί μαζί με άλλους δύο διαφορετικού χρώματος. Διαλέγουμε πάλι ένα βόλο. Βρείτε την πιθανότητα ο δεύτερος βόλος να είναι μαύρος.

Λύση:

- (α) Ορίζουμε τα ενδεχόμενα: $K = \{\text{μια γυναίκα έχει καρκίνο του μαστού}\}$ και $M = \{\text{η μαστογραφία μιας γυναίκας είναι θετική}\}$. Άρα, σύμφωνα με την εκφώνηση έχουμε ότι $P(K) = 0.02$, $P(M | K) = 0.85$ και $P(M | K^c) = 0.05$ και ζητείται η πιθανότητα $P(M)$. Εφαρμόζοντας το θεώρημα ολικής πιθανότητας έχουμε:

$$P(M) = P(M | K)P(K) + P(M | K^c)P(K^c) = 0.85 \cdot 0.02 + 0.05 \cdot (1 - 0.02) = 0.066$$

- (β) Το να επιλέξουμε 13 οποιαδήποτε χαρτιά από μια τράπουλα 52 φύλλων γίνεται με $\binom{52}{13}$ τρόπους. Για να επιλέγουμε 5 σπαθιά, υπάρχουν $\binom{13}{5}$ τρόποι καθώς υπάρχουν 13 φύλλα με αυτό το σχήμα. Ομοίως, υπάρχουν $\binom{13}{4}$ τρόποι να επιλέξουμε 4 μπαστούνια, $\binom{13}{3}$ τρόποι να επιλέξουμε 3 κούπες και $\binom{13}{1}$ τρόποι να επιλέξουμε 1 καρώ. Άρα, η πιθανότητα που ζητείται ισούται με:

$$\frac{\binom{13}{5} \binom{13}{4} \binom{13}{3} \binom{13}{1}}{\binom{52}{13}}$$

- (γ) Ορίζουμε τα ενδεχόμενα: $A_1 = \{\text{ο πρώτος βόλος είναι άσπρος}\}$, $M_1 = \{\text{ο πρώτος βόλος είναι μαύρος}\}$ και $M_2 = \{\text{ο δεύτερος βόλος είναι μαύρος}\}$. Ζητείται η πιθανότητα $P(M_2)$. Εφαρμόζοντας το θεώρημα ολικής πιθανότητας έχουμε:

$$P(M_2) = P(M_2 | A_1)P(A_1) + P(M_2 | M_1)P(M_1) = \frac{10}{16} \cdot \frac{6}{14} + \frac{8}{16} \cdot \frac{8}{14} \approx 0.55$$

Θέμα 1.5

- (α) Έστω ότι μια γυναίκα παρουσιάζει καρκίνο του μαστού με πιθανότητα 0.02. Η μαστογραφία μιας γυναίκας που έχει καρκίνο στο μαστό είναι θετική με πιθανότητα 0.85, ενώ μιας γυναίκας που δεν έχει, είναι θετική με πιθανότητα 0.05. Ποια η πιθανότητα η γυναίκα να έχει καρκίνο του μαστού δεδομένου ότι η μαστογραφία βγήκε θετική;
- (β) Μια τράπουλα περιέχει συνολικά 52 φύλλα που είναι χωρισμένα σε 4 σύμβολα ($\diamond, \heartsuit, \clubsuit, \spadesuit$) και καθένα από αυτά έχει 13 φύλλα στην σειρά (A-2-3-...-10-J-Q-K). Επιλέγουμε 7 χαρτιά. Βρείτε την πιθανότητα ανάμεσα σε αυτά τα χαρτιά να βρίσκονται τουλάχιστον 3 ντάμες (Q).
- (γ) Σε ένα κουτί υπάρχουν 7 κόκκινες και 9 μπλε κάρτες. Διαλέγουμε τυχαία μια κάρτα και βλέπουμε στο κουτί 3 μπλε κάρτες (αλλά όχι αυτή που διαλέξαμε). Διαλέγουμε πάλι μια κάρτα. Βρείτε την πιθανότητα η δεύτερη κάρτα να είναι μπλε.

Λύση:

- (α) Ορίζουμε τα ενδεχόμενα: $K = \{\text{μια γυναίκα έχει καρκίνο του μαστού}\}$ και $M = \{\text{η μαστογραφία μιας γυναίκας είναι θετική}\}$. Άρα, σύμφωνα με την εκφώνηση έχουμε ότι $P(K) = 0.02$, $P(M | K) = 0.85$ και $P(M | K^c) = 0.05$ και ζητείται η πιθανότητα $P(K | M)$. Έχουμε:

$$\begin{aligned} P(K | M) &= \frac{P(M | K)P(K)}{P(M)} = \frac{P(M | K)P(K)}{P(M | K)P(K) + P(M | K^c)P(K^c)} = \\ &= \frac{0.85 \cdot 0.02}{0.85 \cdot 0.02 + 0.05 \cdot (1 - 0.02)} \approx 0.26 \end{aligned}$$

- (β) Το να επιλέξουμε 7 οποιαδήποτε χαρτιά από μια τράπουλα 52 φύλλων γίνεται με $\binom{52}{7}$ τρόπους. Το ενδεχόμενο να υπάρχουν τουλάχιστον 3 ντάμες στα 7 χαρτιά που επιλέγουμε είναι ουσιαστικά το ενδεχόμενο να υπάρχουν 3 ή 4 ντάμες στα χαρτιά αυτά.

Για να επιλέξουμε 3 ντάμες υπάρχουν $\binom{4}{3}$ τρόποι καθώς υπάρχουν 4 ντάμες συνολικά. Έπειτα, από τα υπόλοιπα 48 χαρτιά που δεν περιέχουν ντάμα, επιλέγουμε τα υπόλοιπα 4 χαρτιά από τα 7 που επιλέγουμε με $\binom{48}{4}$ τρόπους. Άρα επιλέγουμε 7 χαρτιά στα οποία υπάρχουν 3 ντάμες με $\binom{4}{3} \binom{48}{4}$ τρόπους.

Για να επιλέξουμε 7 χαρτιά από τα οποία τα 4 είναι ντάμες, υπάρχουν $\binom{48}{3}$ τρόποι καθώς επιλέγουμε 3 χαρτιά από τα υπόλοιπα 48 χαρτιά της τράπουλας, έχοντας επιλέξει και τις 4 ντάμες.

Άρα η ζητούμενη πιθανότητα ισούται με:

$$\frac{\binom{4}{3} \binom{48}{4} + \binom{48}{3}}{\binom{52}{7}}$$

- (γ) Ορίζουμε τα ενδεχόμενα: $K_1 = \{\text{η πρώτη κάρτα είναι κόκκινη}\}$, $M_1 = \{\text{η πρώτη κάρτα είναι μπλε}\}$ και $M_2 = \{\text{η δεύτερη κάρτα είναι μπλε}\}$. Ζητείται η πιθανότητα $P(M_2)$. Εφαρμόζοντας το θεώρημα ολικής πιθανότητας έχουμε:

$$P(M_2) = P(M_2 | M_1)P(M_1) + P(M_2 | K_1)P(K_1) = \frac{11}{18} \cdot \frac{9}{16} + \frac{12}{18} \cdot \frac{7}{16} \approx 0.64$$