

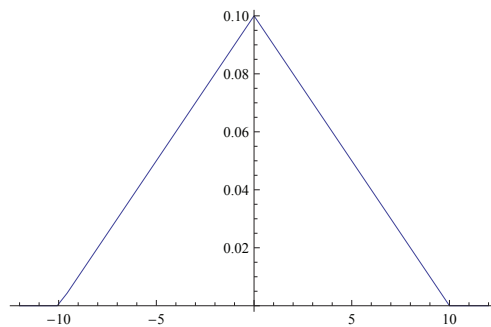
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών
ΗΥ-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2020-2021
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Λύσεις Πέμπτης Σειράς Ασκήσεων

Άσκηση 1.

(α) Το εμβαδόν κάτω από την $f_X(x)$ πρέπει να είναι μονάδα:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = \frac{1}{2} \times 20 \times a = 10a = 1 \Rightarrow a = 0.1.$$



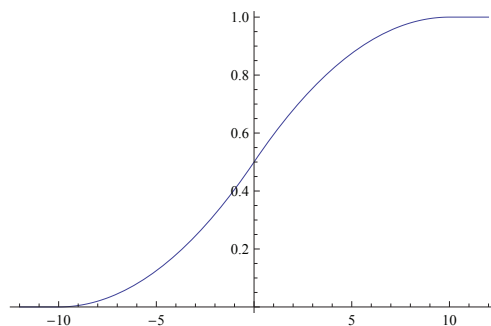
Σχήμα 1: Η γραφική παράσταση της $f_X(x)$.

(β) Εφόσον η $f_X(x)$ είναι άρτια συνάρτηση, τότε $E[X] = 0$. Επιπλέον:

$$\text{var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = E[X^2] - 0 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x) dx = 2 \int_0^{10} \frac{10-x}{100} x^2 dx = \frac{50}{3}.$$

(γ) Ομοίως η αθροιστική συνάρτηση κατανομής είναι:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt = \begin{cases} 0, & x < -10 \\ 0.005(x+10)^2, & x \in [-10, 0] \\ 1 - 0.005(x-10)^2, & x \in [0, 10] \\ 1, & x > 10 \end{cases}$$



Σχήμα 2: Η γραφική παράσταση της $F_X(x)$.

Άσκηση 2. (α) Παραγωγίζοντας την αθροιστική συνάρτηση κατανομής, παίρνουμε τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ xe^{-x} & , x \geq 0 \end{cases}$$

Ισχύει ότι $f_X(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx &= \int_{-\infty}^0 f_X(x) dx + \int_0^{+\infty} f_X(x) dx = \int_{-\infty}^0 0 dx + \int_0^{+\infty} xe^{-x} dx = \\ &= [-xe^{-x}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \left(-\frac{x}{e^x}\right) - 0 \right) + [-e^{-x}]_0^{+\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{e^x}\right) + (-0 + 1) = 1. \end{aligned}$$

Άρα η $F_X(x)$ αντιστοιχεί πράγματι σε μία έγκυρη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας.

(β) Έχουμε

$$P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - F_X(3) = 1 - (1 - 4e^{-3}) = 4e^{-3}$$

και

$$P(1 < X \leq 6) = P(X \leq 6) - P(X < 1) = F_X(6) - F_X(1) = 1 - 7e^{-6} - 1 + 2e^{-1} = -7e^{-6} + 2e^{-1}.$$

Άσκηση 3. Η πιθανότητα για οποιοδήποτε γεγονός να συμβεί ισούται με το αντίστοιχο εμβαδόν κατώ από την σ.π.π.. Παρατηρήστε ότι $X^2 - 12X + 35 = (X-5)(X-7)$. Οπότε, $X^2 - 12X + 35 > 0$ αν και μόνο αν $\{X > 7\} \cup \{X < 5\}$. Εφόσον $X \sim U[2, 10]$, $f_X(x) = 1/8$ για $x \in [2, 10]$ και $f_X(x) = 0$ αλλού. Έχουμε:

$$\begin{aligned} P(X^2 - 12X + 35 > 0) &= P(\{X > 7\} \cup \{X < 5\} \cap \{2 \leq X \leq 10\}) \\ &= P(\{2 \leq X < 5\} \cup \{7 < X \leq 10\}) \\ &= P(\{2 \leq X < 5\}) + P(\{7 < X \leq 10\}) \\ &= 1/8 \times (5 - 2) + 1/8 \times (10 - 7) \\ &= 1/8 \times 3 + 1/8 \times 3 = 0.75. \end{aligned}$$

Άσκηση 4. Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή X είναι ο χρόνος ζωής ενός τυχαία επιλεγμένου κυκλώματος. Ορίζουμε τα εξής γεγονότα:

A_t : Το κύκλωμα εξακολουθεί να λειτουργεί κατά τη χρονική στιγμή t .

B : Το κύκλωμα είναι “κακό”.

G : Το κύκλωμα είναι “καλό”.

Κάνοντας χρήση των εκθετικών κατανομών,

$$\begin{aligned} P(A_t | G) &= \int_t^{\infty} \alpha e^{-\alpha x} dx = e^{-\alpha t} \\ P(A_t | B) &= \int_t^{\infty} 1000\alpha e^{-1000\alpha x} dx = e^{-1000\alpha t}. \end{aligned}$$

(α) Εφαρμόζουμε το θεώρημα ολικής πιθανότητας,

$$P(A_t) = P(G)P(A_t|G) + P(B)P(A_t|B) = pe^{-\alpha t} + (1-p)e^{-1000\alpha t}.$$

(β) Μας ζητείται η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της X . Από το υποερώτημα (α), έχουμε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής της X :

$$F_X(x) = P(X \leq x) = 1 - P(A_x) = 1 - pe^{-\alpha x} - (1-p)e^{-1000\alpha x}.$$

Επομένως:

$$f_X(x) = \frac{d}{dx}F_X(x) = p\alpha e^{-\alpha x} + (1-p)1000\alpha e^{-1000\alpha x}.$$

(γ) Κάνοντας χρήση του ορισμού της δεσμευμένης πιθανότητας, έχουμε:

$$P(B|A_t) = \frac{P(B \cap A_t)}{P(A_t)}.$$

Επιπλέον, $P(B \cap A_t) = P(B)P(A_t|B) = (1-p)e^{-1000\alpha t}$. Επομένως,

$$P(B|A_t) = \frac{(1-p)e^{-1000\alpha t}}{pe^{-\alpha t} + (1-p)e^{-1000\alpha t}} = \frac{1}{(p/(1-p))e^{999\alpha t} + 1}.$$

Προκειμένου να ισχύει $P(B|A_t) < 0.01$ όταν $p/(1-p) = 9$, πρέπει να ισχύσει $e^{999\alpha t} > 11$, το οποίο δίνει $t > \frac{\ln 11}{999\alpha}$.

Άσκηση 5.

(α)

$$\begin{aligned} P(|X| < 8) &= P(-8 < X < 8) \\ &= \Phi\left(\frac{8-2}{10}\right) - \Phi\left(\frac{-8-2}{10}\right) \\ &= \Phi(0.6) - \Phi(-1) \\ &= \Phi(0.6) - (1 - \Phi(1)) \\ &= \Phi(0.6) + \Phi(1) - 1 \end{aligned}$$

(β)

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[(X-4)^2] &= \mathbf{E}[X^2 - 8X + 16] \\ &= \mathbf{E}[X^2] - 8\mathbf{E}[X] + 16 \\ &= \text{var}(X) + \mathbf{E}^2[X] - 8\mathbf{E}[X] + 16 \\ &= 100 + 4 - 8 \cdot 2 + 16 = 104 \end{aligned}$$

Άσκηση 6.

Ισχύει ότι,

$$f_X(x) = \frac{dF_X}{dx}(x) = \begin{cases} 3\alpha^3 x^{-4}, & x \geq \alpha \\ 0, & x < \alpha \end{cases}$$

Επίσης,

$$\begin{aligned}
 E[X] &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx = \int_{\alpha}^{+\infty} x 3 \alpha^3 x^{-4} dx \\
 &= 3 \alpha^3 \int_{\alpha}^{+\infty} x^{-3} dx \\
 &= 3 \alpha^3 \left(-\frac{1}{2} x^{-2} \right) \Big|_{\alpha}^{+\infty} \\
 &= \frac{3\alpha}{2}
 \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}
 E[X^2] &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x) dx = \int_{\alpha}^{+\infty} x^2 3 \alpha^3 x^{-4} dx \\
 &= 3 \alpha^3 \int_{\alpha}^{+\infty} x^{-2} dx \\
 &= 3 \alpha^3 \left(-x^{-1} \right) \Big|_{\alpha}^{+\infty} \\
 &= 3\alpha^2
 \end{aligned}$$

Άρα, η διασπορά είναι,

$$var(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = 3\alpha^2 - \left(\frac{3\alpha}{2}\right)^2 = \frac{3\alpha^2}{4}$$

Άσκηση 7.

(α) Από τη θεωρία, ισχύει ότι: $R = R_1 + R_2 + R_3 \sim N(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3, \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2)$, αφού οι R_1, R_2, R_3 είναι ανεξάρτητες Γκαουσιανές τ.μ. Τελικά, $R \sim N(2100, 7700)$

$$\begin{aligned}
 (\beta) \quad P(1950 \leq R \leq 2200) &= P\left(\frac{1950 - 2100}{\sqrt{7700}} \leq \frac{R - 2100}{\sqrt{7700}} \leq \frac{2200 - 2100}{\sqrt{7700}}\right) = P(-1.71 \leq \\
 \frac{R - 2100}{\sqrt{7700}} &\leq 1.14) = \Phi(1.14) - \Phi(-1.71) = \Phi(1.14) + \Phi(1.71) - 1
 \end{aligned}$$