

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

HY-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2020-2021
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Πέμπτη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 29/11/2020

Ημερομηνία Παράδοσης: 09/12/2020

ΣΗΜΑΝΤΙΚΕΣ ΟΔΗΓΙΕΣ

- Η παράδοση των ασκήσεών σας θα γίνεται ηλεκτρονικά, **ΑΠΟΚΛΕΙΣΤΙΚΑ** μέσω της σελίδας e-learn του μαθήματος, **εδώ**. Παραδόσεις με e-mail, ή οποιονδήποτε άλλον τρόπο δε θα γίνονται δεκτές και θα **μηδενίζονται**.
- Για την παράδοση, θα πρέπει να σκανάρετε ή να φωτογραφίσετε τις κόλλες των ασκήσεών σας και στη συνέχεια να φτιάξετε ένα PDF που θα περιλαμβάνει αυτές τις φωτογραφίες, δηλαδή το σύνολο της λυμένης σειράς ασκήσεων.
- Αριθμήστε τις σελίδες των ασκήσεών σας (από την άσκηση 1, στην άσκηση 2, στην άσκηση 3 κ.ο.κ.) και **ΣΙΓΟΥΡΕΥΤΕΙΤΕ** ότι τα σκαναρίσματα που έχετε κάνει έχουν δημιουργήσει εικόνες στις οποίες είναι **ΕΥΔΙΑΚΡΙΤΕΣ** και **ΕΥΚΟΛΟΔΙΑΒΑΣΤΕΣ** οι λύσεις σας. Θο-λές, και γενικότερα θορυβώδεις, εικόνες ενδέχεται να καταστήσουν αδύνατη τη διαδικασία της διόρθωσης και κατ' επέκταση να οδηγήσουν σε μηδενισμό των ασκήσεών σας.

Άσκηση 1. Η συνεχής τυχαία μεταβλητή X έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.):

$$f_X(x) = \begin{cases} a(1 - 0.1|x|) & \text{για } -10 \leq x \leq 10, \\ 0 & \text{αλλιώς,} \end{cases}$$

όπου a μία σταθερά.

(α) Δώστε τη γραφική παράσταση της σ.π.π. και υπολογίστε το a .

(β) Υπολογίστε τη μέση τιμή και τη διασπορά της τ.μ. X .

(γ) Υπολογίστε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής (α.σ.κ.), $F_X(x)$, της X και δώστε τη γρα-φική της παράσταση.

Άσκηση 2. Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή X έχει αθροιστική συνάρτηση κατανομής:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ 1 - (x + 1) \cdot e^{-x} & , x \geq 0 \end{cases}$$

(α) Δείξτε ότι η $F_X(x)$ αντιστοιχεί σε μία έγκυρη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας.

(β) Υπολογίστε τις πιθανότητες $P(X > 3)$ και $P(1 < X \leq 6)$.

Άσκηση 3. Δίδεται η τ.μ. $X \sim U[2, 10]$, δηλαδή, η X είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη στο δι-άστημα $[2, 10]$. Υπολογίστε την πιθανότητα του γεγονότος $X^2 - 12X + 35 > 0$.

Άσκηση 4. Ένα κύκλωμα υπολογιστή έχει διάρκεια ζωής η οποία αποτελεί μία συνεχή τυχαία μεταβλητή. Έστω ότι ένα εργοστάσιο παράγει ένα μείγμα “καλών” και “κακών” κυκλωμάτων. Για κάποια θετική σταθερά α , η διάρκεια ζωής των καλών κυκλωμάτων είναι εκθετικά κατανομημένη με παράμετρο α ενώ η διάρκεια ζωής των κακών κυκλωμάτων είναι εκθετικά κατανομημένη με παράμετρο 1000α . Έστω ότι το ποσοστό των καλών κυκλωμάτων είναι p και ότι το ποσοστό των κακών κυκλωμάτων είναι $1 - p$.

(α) Υπολογίστε την πιθανότητα ότι ένα τυχαία επιλεγμένο κύκλωμα εξακολουθεί να λειτουργεί μετά από t μονάδες χρόνου.

(β) Υπολογίστε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής και την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της διάρκειας ζωής ενός τυχαία επιλεγμένου κυκλώματος.

(γ) Για να γίνει διαλογή των καλών κυκλωμάτων, κάθε κύκλωμα δοκιμάζεται για t μονάδες χρόνου και μόνο εκείνα τα οποία δεν χαλάνε κατά τη δοκιμή αποστέλλονται στους πελάτες. Υπολογίστε την πιθανότητα ότι ένας πελάτης λαμβάνει ένα “κακό” κύκλωμα ως συνάρτηση των παραμέτρων α , p , και t . Αν $p = 0.9$, πόσο πρέπει να διαρκεί η δοκιμή (δηλαδή, πόσο μεγάλο πρέπει να είναι το t) ώστε η πιθανότητα να στέλνονται κακά κυκλώματα στους πελάτες να είναι μικρότερη από 1%;

Άσκηση 5. Η τ.μ. X ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή $\mu = 2$ και διασπορά $\sigma^2 = 100$, δηλαδή $X \sim N(2, 100)$.

(α) Υπολογίστε την πιθανότητα $P(|X| < 8)$.

(β) Υπολογίστε την μέση τιμή $E[(X - 4)^2]$.

Άσκηση 6. Υπολογίστε τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, τη μέση τιμή και τη διασπορά της τυχαίας μεταβλητής X με αθροιστική συνάρτηση κατανομής

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - \frac{a^3}{x^3} & , x \geq a \\ 0 & , x < a \end{cases}$$

όπου a είναι μια θετική σταθερά.

Άσκηση 7. Οι ηλεκτρικές αντιστάσεις R_1, R_2, R_3 μοντελοποιούνται ως ανεξάρτητες τ.μ. οι οποίες ακολουθούν Γκαουσιανή κατανομή με μέσες τιμές $\mu_1 = 600, \mu_2 = 700, \mu_3 = 800$ και διασπορές $\sigma_1^2 = 1600, \sigma_2^2 = 2500, \sigma_3^2 = 3600$, αντίστοιχα.

(α) Ποια είναι η κατανομή της ολικής αντίστασης $R = R_1 + R_2 + R_3$;

(β) Υπολογίστε την πιθανότητα $P(1950 \leq R \leq 2200)$ εκφράζοντας την απάντησή σας βάσει τιμών της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής της τυπικής Γκαουσιανής.