

Λύσεις Τέταρτης Σειράς Ασκήσεων

Άσκηση 1. Εφαρμόζοντας τα βήματα της μαθηματικής επαγωγής, έχουμε:

- **Βασικό Βήμα:** Για $k = 0$, έχουμε:

$$p_X(1) = \binom{n}{1} p^1 (1-p)^{n-1} = np(1-p)^{n-1} = np \frac{(1-p)^n}{1-p} = \frac{p}{1-p} \cdot \frac{n-0}{0+1} \cdot (1-p)^n = \frac{p}{1-p} \cdot n \cdot p_X(0)$$

- **Επαγωγική Υπόθεση:** Υποθέτουμε ότι η πρόταση είναι αληθής για κάποιο $k = l$. Δηλαδή, ότι ισχύει:

$$p_X(l) = \binom{n}{l} p^l (1-p)^{n-l} = \frac{p}{1-p} \cdot \frac{n-(l-1)}{(l-1)+1} \cdot p_X(l-1) = \frac{p}{1-p} \cdot \frac{n-l+1}{l} \cdot p_X(l-1)$$

- **Επαγωγικό Βήμα:** Για $k = l+1$, έχουμε:

$$\begin{aligned} p_X(l+1) &= \binom{n}{l+1} p^{l+1} (1-p)^{n-l-1} = \binom{n}{l} \frac{n-l}{l+1} p^{l+1} (1-p)^{n-l-1} \\ &= \frac{n-l}{l+1} \binom{n}{l} p^{l+1} (1-p)^{n-l-1} = \frac{p}{1-p} \frac{n-l}{l+1} \binom{n}{l} p^l (1-p)^{n-l} = \frac{p}{1-p} \frac{n-l}{l+1} p_X(l) \end{aligned}$$

Άσκηση 2.

- (i) Για $k = 1, 2, \dots, n$, έχουμε:

$$\frac{p_X(k)}{p_X(k-1)} = \frac{\binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}}{\binom{n}{k-1} \cdot p^{k-1} \cdot (1-p)^{n-k+1}} = \frac{(n-k+1) \cdot p}{k \cdot (1-p)} = \frac{(n+1)p - kp}{k - kp}$$

- Αν $k \leq k^*$, τότε $k \leq (n+1)p$. Ισοδύναμα: $k - kp \leq (n+1)p - kp$, συνεπώς ο παραπάνω λόγος είναι μεγαλύτερος ή ίσος του 1. Ως εκ τούτου, η $p_X(k)$ είναι μονοτονικά μη-φθίνουσα στο εν λόγω διάστημα.
- Αν $k > k^*$, τότε ο παραπάνω λόγος είναι μικρότερος του 1. Ως εκ τούτου, η $p_X(k)$ είναι μονοτονικά φθίνουσα στο εν λόγω διάστημα.

- (ii) Χρησιμοποιώντας τον τύπο για την Poisson ΣΜΠ, για $k \geq 1$, έχουμε:

$$\frac{p_X(k)}{p_X(k-1)} = \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!} \cdot \frac{(k-1)!}{\lambda^{k-1} \cdot e^{-\lambda}} = \frac{\lambda}{k}$$

- Αν $k \leq \lambda$, τότε ο παραπάνω λόγος είναι μεγαλύτερος του 1. Ως εκ τούτου, η $p_X(k)$ είναι μονοτονικά αύξουσα στο εν λόγω διάστημα.
- Αν $k > \lambda$, τότε ο παραπάνω λόγος είναι μικρότερος του 1. Ως εκ τούτου, η $p_X(k)$ είναι μονοτονικά φθίνουσα στο εν λόγω διάστημα.

Άσκηση 3.

Από την εκφώνηση της άσκησης, καταλαβαίνουμε ότι η T.M. X ακολουθεί μία "παραλλαγή" της Διακριτής Ομοιόμορφης Κατανομής, με ΣΜΠ που δίνεται από τον εξής τύπο:

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a+1} & x = 2^k, a \leq k \leq b, k \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

(i) Με βάση τον τύπο ορισμού της Μέσης Τιμής, έχουμε:

$$\begin{aligned} E[X] &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x p_X(x) = \sum_{k=a}^b x p_X(x) = \sum_{k=a}^b 2^k \cdot \frac{1}{b-a+1} = \\ &= \frac{1}{b-a+1} \sum_{k=a}^b 2^k = \frac{2^a}{b-a+1} (1 + 2 + \dots + 2^{b-a}) = \frac{2^{b+1} - 2^a}{b-a+1} \end{aligned}$$

(ii) Για τον υπολογισμό της διασποράς της T.M. X , $VAR[X]$, θα χρησιμοποιήσουμε τη γνωστή από την θεωρία σχέση:

$$VAR[X] = E[X^2] - (E[X])^2$$

Για τον υπολογισμό της ροπής 2^{ας} τάξεως, $E[X^2]$, έχουμε:

$$\begin{aligned} E[X^2] &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x^2 p_X(x) = \sum_{k=a}^b x^2 p_X(x) = \sum_{k=a}^b (2^k)^2 \cdot \frac{1}{b-a+1} = \\ &= \frac{1}{b-a+1} \sum_{k=a}^b (2^k)^2 = \frac{4^{b+1} - 4^a}{3(b-a+1)} \end{aligned}$$

Άρα, η διασπορά της T.M. X , $VAR[X]$ θα είναι τελικά:

$$VAR[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{4^{b+1} - 4^a}{3(b-a+1)} - \left(\frac{2^{b+1} - 2^a}{b-a+1} \right)^2$$

Άσκηση 4.

(i) Έστω X η T.M. που αναπαριστά το κέρδος σας από το παιχνίδι. Προκειμένου να υπολογίσουμε την ζητούμενη Μέση Τιμή, πρέπει να προσδιορίσουμε τις πιθανότητες με τις οποίες μπορούν να συμβούν τα διαφορετικά αποτελέσματα του παιχνιδιού. Πιο συγκεκριμένα, έχουμε:

- Αν το κέρμα φέρει "Γράμματα" στην $n = 1$ -η ρίψη, κερδίζετε $2^n = 2^1$ ευρώ, με πιθανότητα $\frac{1}{2}$
- Αν το κέρμα φέρει "Γράμματα" στην $n = 2$ -η ρίψη, κερδίζετε $2^n = 2^2$ ευρώ, με πιθανότητα $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$
- Αν το κέρμα φέρει "Γράμματα" στην $n = 3$ -η ρίψη, κερδίζετε $2^n = 2^3$ ευρώ, με πιθανότητα $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$
- ...
- Αν το κέρμα φέρει "Γράμματα" στην $n = k$ -η ρίψη, κερδίζετε $2^n = 2^k$ ευρώ, με πιθανότητα $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \dots \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2^k}$

Με βάση τον τύπο ορισμού της Μέσης Τιμής, έχουμε:

$$E[X] = \sum_{x=-\infty}^{+\infty} x p_X(x) = \sum_{x=1}^{+\infty} x p_X(x) = \sum_{x=1}^{+\infty} 2^x \cdot 2^{-x} = \sum_{x=1}^{+\infty} 1 = +\infty$$

- (ii) Με βάση το αποτέλεσμα του προηγούμενου ερωτήματος, αν είχατε να επιλέξετε μεταξύ του να πληρώσετε f ευρώ για να παίξετε το παιχνίδι και να μην παίξετε καθόλου, **με στόχο να μεγιστοποιήσετε το αναμενόμενο κέρδος σας**, θα ήταν πιο συνετό να πληρώσετε οποιοδήποτε ποσό και να παίξετε το παιχνίδι. Ωστόσο, κάτι τέτοιο δεν συμβαίνει πάντα στην πράξη με την συμπεριφορά των ατόμων. Πράγματι, πειράματα έχουν δείξει ότι οι περισσότεροι άνθρωποι προτίθενται να πληρώσουν 30 – 40 ευρώ για να παίξουν το παιχνίδι. Η εν λόγω απόκλιση οφείλεται στην εικασία ότι το ποσό που κάποιος προτίθεται να πληρώσει καθορίζεται από το αναμενόμενο κέρδος. Ωστόσο, το αναμενόμενο κέρδος δεν λαμβάνει υπόψη την συμπεριφορά ενός ατόμου ως προς την ανάληψη ρίσκου.

Άσκηση 5.

Έστω X Τ.Μ. που απεικονίζει το πλήθος των “ K ” σε 4 ρίψεις του κέρματος. Η πιθανότητα «επιτυχίας» (να έρθει “ K ”) σε 4 διαδοχικές ρίψεις είναι 0.4, σύμφωνα με την εκφώνηση της άσκησης. Άρα, η X ακολουθεί Διωνυμική Κατανομή με $n = 4$ και $p = 0.4$. Ως εκ τούτου, η ΣΜΠ της θα είναι η εξής:

$$p_X(k) = \binom{4}{k} \cdot (0.4)^k \cdot (0.6)^{4-k}, k = 0, 1, \dots$$

- (i) Σύμφωνα με την στρατηγική α), το κέρδος του Λάκη θα είναι X . Σύμφωνα με τη στρατηγική β), το κέρδος του Λάκη θα είναι $Y = X^2 - 1.5X$. Προσδιορίζουμε την μεση τιμή του κέρδους σε κάθε περίπτωση, ώστε ν’ αποφασίσουμε ποια στρατηγική είναι η πιο συμφέρουσα:

$$\begin{aligned} E[X] &= np = 4 \cdot 0.4 = 1.6 \\ E[Y] &= E[X^2 - 1.5X] = E[X^2] - 1.5E[X] = \text{VAR}[X] + (E[X])^2 - 1.5E[X] \\ &= np(1-p) + (np)^2 - 1.5np \\ &= 4 \cdot 0.4 \cdot 0.6 + (4 \cdot 0.4)^2 - 1.5 \cdot 4 \cdot 0.4 \\ &= 0.96 + 2.56 - 2.4 = 1.12 \end{aligned}$$

, όπου χρησιμοποιήθηκε η γνωστή σχέση $\text{VAR}[X] = E[X^2] - (E[X])^2$.

Παρατηρούμε ότι $E[X] > E[Y]$, και ως εκ τούτου η στρατηγική α) είναι η πιο συμφέρουσα για τον Λάκη.

- (ii) Ακολουθώντας παρόμοιο σκεπτικό με το προηγούμενο ερώτημα, η στρατηγική α) είναι συμφερότερη από τη β) αν ισχύει $E[X] > E[Y]$. Θα επιλύσουμε την παραπάνω ανισότητα, ώστε να βρούμε το ζητούμενο εύρος τιμών της πιθανότητας «επιτυχίας» p :

$$\begin{aligned} E[X] > E[Y] &\Rightarrow E[X] > \text{VAR}[X] + (E[X])^2 - 1.5E[X] \Rightarrow np > np(1-p) + (np)^2 - 1.5np \Rightarrow \\ 2.5np &> np - np^2 + n^2p^2 \Rightarrow 1.5np > np^2(n-1) \Rightarrow 1.5p - p^2(n-1) > 0 \Rightarrow \frac{3}{2}p + p^2(1-n) > 0 \\ 0 &\Rightarrow \frac{3}{2}p + p^2(1-4) > 0 \Rightarrow \frac{3}{2}p - 3p^2 > 0 \Rightarrow 3p(\frac{1}{2} - p) > 0 \Rightarrow \frac{1}{2} - p > 0 \Rightarrow p < \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Ως εκ τούτου, το ζητούμενο εύρος τιμών είναι: $\boxed{0 < p < \frac{1}{2}}$.

Άσκηση 6.

- Η Τ.Μ. Y ακολουθεί Διωνυμική Κατανομή με $n = 4$ και $p = \frac{1}{6}$. Ως εκ τούτου, η περιθώρια ΣΜΠ $p_Y(y)$ θα δίνεται από τον τύπο:

$$p_Y(y) = \binom{4}{y} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^y \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{4-y}, y = 0, 1, \dots, 4$$

- Για να υπολογίσουμε τη δεσμευμένη ΣΜΠ $p_{X|Y}(x | y)$, παρατηρούμε ότι δεδομένου ότι $Y = y$, X είναι ο αριθμός των 1 στις εναπομείνουσες $4 - y$ ζαριές, κάθε μία από τις οποίες μπορεί να πάρει 5 τιμές (1, 3, 4, 5, 6) με την ίδια πιθανότητα ($\frac{1}{5}$).

- Άρα, η Τ.Μ. $X \mid Y$ θα ακολουθεί Διωνυμική Κατανομή με $n = 4 - y$ και $p = \frac{1}{5}$. Ως εκ τούτου, η περιθώρια ΣΜΠ $p_{X|Y}(x \mid y)$ θα δίνεται από τον τύπο:

$$p_{X|Y}(x \mid y) = \binom{4-y}{x} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^x \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{4-y-x}, 0 \leq x+y \leq 4, x \geq 0, y \geq 0$$

- Με γνωστές τις $p_Y(y)$ και $p_{X|Y}(x \mid y)$, η ζητούμενη από κοινού ΣΜΠ των Τ.Μ. X και Y , δίνεται από τον τύπο:

$$p_{X,Y}(x, y) = p_Y(y) \cdot p_{X|Y}(x \mid y)$$

Άρα, τελικά έχουμε:

$$p_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \binom{4}{y} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^y \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{4-y} \cdot \binom{4-y}{x} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^x \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{4-y-x} & 0 \leq x+y \leq 4, x \geq 0, y \geq 0 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$